1. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

① 11항 ② 12항 ③ 13항 ④ 14항 ⑤ 15항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$인 자연수의
최솟값을 구하면 된다.
그런데 $2^{10} = 1024$이므로
$2^{11} = 2048$
$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$
$n - 1 \geq 11$
$n \geq 12$

2. 첫째항이 1 이고, 공비가 4 인 등비수열에서 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 1000 보다 크게 되는가?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

첫째항이 1, 공비가 4 인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{1 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} > 1000,\ 4^n > 3001$$

$$2n \log 2 > \log 3001$$

$$n > \frac{\log 3001}{2 \log 2} > \frac{\log 3000}{2 \log 2}$$

$$= \frac{\log 3 + \log 1000}{2 \log 2} = \frac{3.4771}{0.6020} = 5.7 \times \times \times$$

3. 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이 있다. 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 100보다 크게 되는가?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$S_n = \dfrac{3(2^n - 1)}{2 - 1} > 100$ 인

자연수 n의 최솟값을 구하면 된다.

$2^n - 1 > \dfrac{100}{3}$

$2^n > \dfrac{103}{3} \fallingdotseq 34.\times\times\times$

$2^5 = 32,\ 2^6 = 64$이므로

$n = 6$

4. $a,\ b,\ c$는 $1 < a < b < c < 9$인 정수이고, 수열 $0.a,\ 0.0b,\ 0.00c,\ \cdots$가 등비수열일 때, 이 수열의 제 4 항은?

① $0.00\dot{1}\dot{5}$ ② $0.00\dot{1}\dot{6}$ ③ $0.00\dot{1}6$

④ $0.00\dot{1}\dot{7}$ ⑤ $0.00\dot{1}\dot{7}$

해설

$0.\dot{a} = \frac{a}{9},\ 0.0\dot{b} = \frac{b}{90},\ 0.00\dot{c} = \frac{c}{900}$ 이므로

$\left(\frac{b}{90}\right)^2 = \frac{a}{9} \times \frac{c}{900}$ 에서 $b^2 = ac$

즉, $a,\ b,\ c$는 이 순서로 등비수열을 이루고

$1 < a < b < c < 9$인 정수이므로 $a = 2,\ b = 4,\ c = 8$ 이다.

따라서 이 수열은 $\frac{2}{9},\ \frac{4}{90},\ \frac{8}{900}, \cdots$ 이므로

첫째항이 $\frac{2}{9}$ 이고, 공비가 $\frac{2}{10}$ 인 등비수열이다.

$\therefore a_4 = \frac{16}{9000} = 0.00\dot{1}\dot{7}$

5. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$ 일 때, 옳은 것을 보기에서 모두 고르면?

보기

㉠ $a_3 = 36$

㉡ $\{a_n\}$은 등비수열이다.

㉢ $\{\log_{10} a_n\}$은 등차수열이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$

$a_1 = S_1 = 4$이므로

$a_n = (2 \cdot 3^n - 2) - (2 \cdot 3^{n-1} - 2) = 4 \cdot 3^{n-1}$

㉠ $a_3 = 36$

㉡ $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열이다.

㉢ $\{\log_{10} a_n\}$은 첫째항이 $\log_{10} 4$, 공차가 $\log_{10} 3$인 등차수열이다.

6. $a_1 = 8,\ a_4 = 1$ 이고 각 항이 실수인 등비수열 a_n 에 대하여 수열 b_n 을 $b_n = \log_2 a_{2n}^2$ 으로 정의하면 수열 b_n 은 첫째항이 c 이고 공차가 d 인 등차수열이다. 이때, $c - d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a_4 = 8 \times r^3 = 1$ 에서 $r^3 = \frac{1}{8},\ r = \frac{1}{2}$

$a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로 $a_{2n} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$

$\therefore\ b_n = \log_2 \left\{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right\}^2 = 2\log_2 2^{-2n+4}$

$= 2(-2n+4) = -4n+8$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 4 이고 공차가 -4 인 등차수열이다.

$\therefore\ c - d = 8$