1. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$(f^{-1})^{-1}=f$ 이므로 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 의 역함수를 구하면

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}=\dfrac{ax+b}{x+c}$

$\therefore\ a=2,\ b=3,\ c=4$

$\therefore\ \ 2+3+4=9$

2. 함수 $y=\dfrac{ax+1}{x-1}$ 의 역함수가 그 자신이 되도록 a 의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

$y=\dfrac{ax+1}{x-1}$ 에서 $y(x-1)=ax+1$

$yx-y=ax+1$, $yx-ax=1+y$

$x(y-a)=1+y$, $x=\dfrac{1+y}{y-a}$

$\therefore\ y^{-1}=\dfrac{x+1}{x-a}$

역함수가 본래 함수와 같으므로

$\dfrac{x+1}{x-a}=\dfrac{ax+1}{x-1}$

$\therefore a=1$

3. 함수 $y = -\frac{1}{x} + 1$ 의 역함수를 바르게 구한 것은?

① $y = \frac{1}{1-x}$　② $y = \frac{1}{1+x}$　③ $y = \frac{x}{1-x}$
④ $y = \frac{1+x}{x}$　⑤ $y = \frac{x}{1+x}$

해설

$y = -\frac{1}{x} + 1$ 에서 $\frac{1}{x} = 1 - y$

$1 = (1-y)x$, $x = \frac{1}{1-y}$

$\therefore\ y = \frac{1}{1-x}$

4. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.

② 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$ 이다.

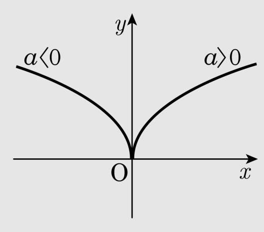
③ $y = -\sqrt{ax}$ 와 x 축에 대하여 대칭이다.

④ $y = \sqrt{-ax}$ 와 y 축에 대하여 대칭이다.

⑤ $a > 0$ 이면 원점과 제 1사분면을 지난다.

해설

$a > 0$ 일 때와 $a < 0$ 일 때의 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



그림에서 ②,③,④,⑤는 참임을 알 수있다.

그러나 $a > 0$ 일 때의 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$

$a < 0$ 일 때의 정의역은 $\{x \mid x \leq 0\}$ 이므로 ①은 틀린 것이다.

5. 다음 중 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y = \sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없는 것은?

① $y = -\sqrt{1-x}+1$　　② $y = \sqrt{x}-1$

③ $y = \sqrt{x-1}+3$　　④ $y = -\sqrt{-x+2}+2$

⑤ $y = \sqrt{-2x+1}-1$

해설

⑤ $y = \sqrt{ax+b}+c$에서 a의 계수가 다르면
평행이동 또는 대칭이동에 의해 겹쳐지지 않는다.

6. 다음 무리함수 중 함수 $y=\sqrt{-x}$을 평행이동하여 얻을 수 없는 것을 고르면?

① $y=\sqrt{-x+2}$ ② $y=\sqrt{-(x+1)}+3$

③ $y=\sqrt{3-x}$ ④ $y=\sqrt{x-1}-1$

⑤ $y=\sqrt{-x}-1$

해설

$y=\sqrt{-x}$에서 x 앞의 부호가 반대일 경우

평행이동하여 얻을 수 없다.

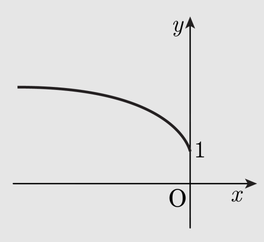
7. 다음 중 무리함수 $y = \sqrt{-3x+1+\sqrt{-12x}}$의 정의역과 치역을 차례대로 나타낸 것을 고르면?

① $\{x \mid x \geq 0\}$, $\{y \mid y \geq 1\}$
② $\{x \mid x \leq 0\}$, $\{y \mid y \geq 1\}$
③ $\{x \mid x \geq 1\}$, $\{y \mid y \leq 0\}$
④ $\{x \mid x \leq 1\}$, $\{y \mid y \geq 0\}$
⑤ $\{x \mid x \leq 0\}$, $\{y \mid y \leq 1\}$

해설

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{-3x+1+\sqrt{-12x}} \\ &= \sqrt{-3x+1+2\sqrt{(-3x)\cdot 1}} \\ &= \sqrt{-3x}+1 \end{aligned}$$

따라서 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



∴ 정의역 : $\{x \mid x \leq 0\}$,
치역 : $\{y \mid y \geq 1\}$

8. 무리함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 6)$을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______개

▷ 정답: 11개

해설

함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때
$2 = \sqrt{2k}, \quad 2k = 4$
$\therefore k = 2$
또, 함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 점 $(3,\ 6)$을 지날 때
$6 = \sqrt{3k}, \quad 3k = 36$
$\therefore k = 12$
따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는
$2 \le k \le 12$ 이므로
정수 k는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 12$의 11개다.

9. x에 대한 방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 상수 m의 값의 범위는 $\alpha < m < \beta$ 이다. 이때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 2

해설

방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 해는
두 그래프 $y = \sqrt{2x}$와 $y = m(x+1)$ 의 교점의 x 좌표이다.
이때, 직선 $y = m(x+1)$ 은 m 의 값에 관계없이
점 $(-1,\ 0)$ 을 지난다.
$y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 직선 $y = m(x+1)$ 이
서로 다른 두 점에서 만나려면 $m > 0$ 이고,
m 은 두 그래프가 접할 때의 기울기보다 작아야 한다.
$\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 양변을 제곱하면
$2x = m^2(x+1)^2$
$m^2x^2 + 2(m^2-1)x + m^2 = 0$
이 방정식의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = (m^2-1)^2 - m^4 = 0$
$-2m^2 + 1 = 0,\ m^2 = \frac{1}{2}$
$\therefore m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\because m > 0)$
따라서, m의 값의 범위는 $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로
$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}$

10. 두 함수 $y=\sqrt{x+3}$과 $y=x+k$의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 갖도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $1 \le k < \frac{13}{4}$　② $2 \le k < \frac{13}{4}$　③ $3 \le k \le \frac{13}{4}$

④ $3 < k < \frac{13}{4}$　⑤ $3 \le k < \frac{13}{4}$

해설

직선과 포물선이 접하려면 $\sqrt{x+3}=x+k$

$\therefore\ x+3=(x+k)^2$

$x^2+(2k-1)x+(k^2-3)=0$ 에서

$D=(2k-1)^2-4(k^2-3)=0$

$4k^2-4k+1-4k^2+12=0$

$\therefore\ -4k+13=0$

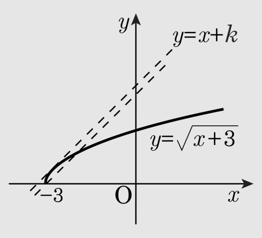
$\therefore\ k=\frac{13}{4}$

또, 직선 $y=x+k$가 점 $(-3,\ 0)$을 지날 때

$0=-3+k\quad\therefore\ k=3$

따라서 서로 다른 두 개의 교점을 가질 때의 k 의 값의 범위는

$3 \le k < \frac{13}{4}$



11. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ 일 때 $f^{1999}(0)$ 의 값은?(단 $f^2(x) = (f \circ f)(x), \cdots\cdots, f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x)$)

① $\dfrac{3}{2}$ ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(0) = 3,$

$f^2(0) = \dfrac{6-3}{3-1} = \dfrac{3}{2}, f^3(0) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$

$\therefore\ f^{3n}(0) = 0$

$1999 = 666 \times 3 + 1$

$\therefore f^{1999}(0) = f(0) = 3$

12. $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{x-2}{x+2}$ 일 때, $f(2)$의 값은?

① -5　② -3　③ 3　④ 5　⑤ 7

해설

$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{x-2}{x+2}$ 일 때,

$\frac{x-1}{x+1}=2$ 에서 $(x-1)=2(x+1)$

$x-1=2x+2$

$\therefore\ x=-3$

이것을 주어진 식에 대입하면

$f(2)=\frac{-3-2}{-3+2}=\frac{-5}{-1}=5$

13. 두 함수 $f(x)=2x-1, g(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ 에 대하여 $(f^{-1}\circ g)(2)$ 의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 7

해설

$(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))=f^{-1}(7)$
$f^{-1}(7)=k$ 라 하면 $f(k)=7$
따라서 $2k-1=7$
$\therefore k=4$