

1. 두 집합 $X = \{-2, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 대응 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?

① $x \rightarrow x + 1$

② $x \rightarrow x^2$

③ $x \rightarrow x - 1$

④ $x \rightarrow x + 2$

⑤ $x \rightarrow 2x + 1$

해설

각각의 치역을 구하면

① $\{-1, 1, 2\}$

② $\{0, 1, 4\}$

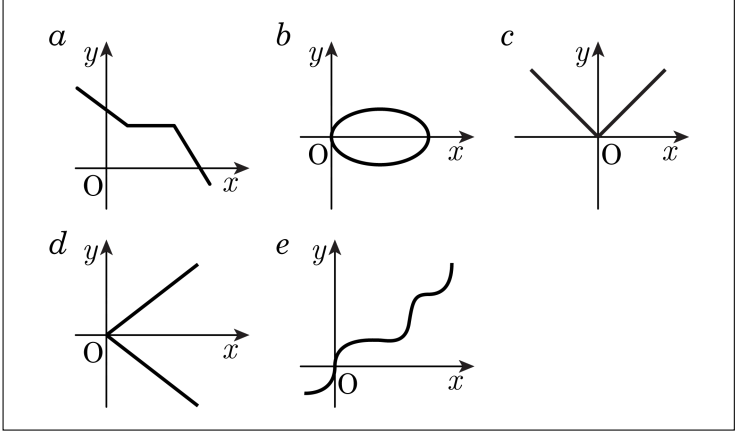
③ $\{-3, -1, 0\}$

④ $\{0, 2, 3\}$

⑤ $\{-3, 1, 3\}$

따라서 주어진 조건을 만족하는 함수는 ④이다.

2. 다음 그래프 중 함수인 것은?

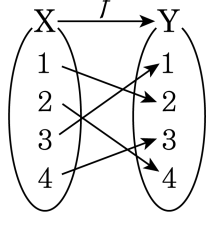


- ① a, b, c ② a, c, e ③ a, c, d ④ b, c, e ⑤ c, d, e

해설

$[a]$ 함수 $[b]$ 함수가 아니다. $[c]$ 함수 $[d]$ 함수가 아니다. $[e]$ 함수 따라서 $[a], [c], [e]$ 만이 함수이다.

3. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?



- ① 함수이다.
- ② 정의역은 {1, 2, 3, 4} 이다.
- ③ 공역은 {1, 2, 3, 4} 이다.
- ④ 치역은 {1, 2, 4} 이다.
- ⑤ 일대일 대응이다.

해설

- ① 주어진 대응 x 의 각 원소에 y 가 1개씩 대응하므로 함수이다.
- ②, ③ 정의역과 공역은 모두 {1, 2, 3, 4} 이다.
- ④ 치역은 {1, 2, 3, 4}이다.
- ⑤ 집합 X 의 각 원소에 대한 함수값이 모두 다르므로 일대일대응이다.

4. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |2x - 3|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $f(X)$ 의 원소가 아닌 것은 무엇인가? (단, $f(X)$ 는 함수 f 의 치역)

① 1

② 2

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

$f(x) = |2x - 3|$ 에서

$f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 5$, $f(5) = 7$ 이므로

$f(X) = \{1, 3, 5, 7\}$

$\therefore 2 \notin f(X)$

5. 집합 $X = \{x|x \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 는 상수 함수이다. $f(2) = 2$ 일 때, $f(1) + f(3) + f(5) + \cdots + f(19)$ 의 값은 얼마인가?

① 100 ② 50 ③ 38 ④ 20 ⑤ 10

해설

$f(x)$ 가 상수함수이므로,
 $f(1) = f(3) = \cdots = f(19) = 2$
 $\therefore f(1) + f(3) + \cdots + f(19) = 2 \cdot 10 = 20$

6. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 일대일 대응은 몇 가지인가?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

X

1

2

3

Y

4

5

6

→

→

→

X

1

2

3

Y

4

5

6

→

→

→

X

1

2

3

Y

4

5

6

→

→

→

X

1

2

3

Y

4

5

6

→

→

→

X

1

2

3

Y

4

5

6

→

→

→

X

1

2

3

Y

4

5

6

→

→

→

X

1

2

3

Y

4

5

6

→

→

→

X

1

2

3

Y

4

5

6

→

→

→

X

1

2

3

Y

4

5

6

→

→

→

∴ 6가지

7. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

- ① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$
④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

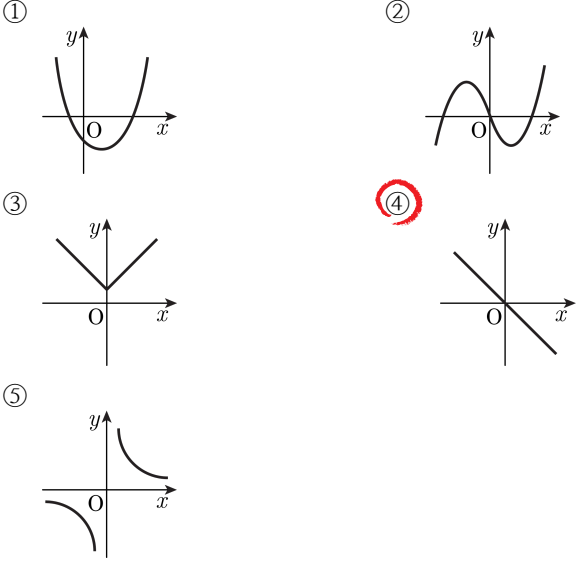
8. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$ 에 대하여 $f(f(1)) + f(f(-2))$ 의 값은?

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$f(x) = (x - 1)(x + 2)$ 에서
 $f(1) = 0, f(-2) = 0, f(0) = -2$ 이고
 $f(f(1)) = f(f(-2)) = f(0)$ 이다.
 $\therefore f(f(1)) + f(f(-2)) = 2f(0) = -4$

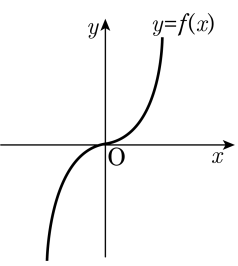
9. 다음 그래프 중에서 실수전체 집합에서 역함수가 존재하는 함수의 그래프는?



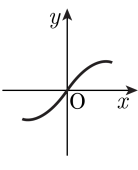
해설

역함수가 존재하려면 함수가 일대일 대응이어야 한다.
일대일 대응이란 변수 x, y 가 서로 하나씩 대응되는 것으로 ④에 해당된다.
⑤번은 $x = 0$ 에 대응되는 y 가 없다.

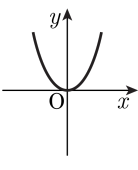
10. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,
다음 중 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프로 적당한 것은
무엇인가?



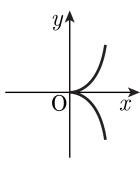
①



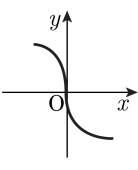
②



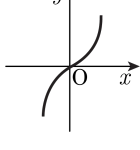
③



④



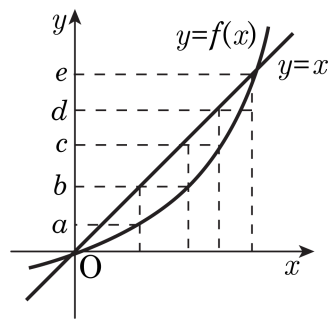
⑤



해설

$y = f(x)$ 의 그래프와
그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

11. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값은?



- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$$\begin{aligned}
 (f \circ f)^{-1}(b) &= (f^{-1} \circ f^{-1})(b) \\
 &= f^{-1}(f^{-1}(b)) \\
 f^{-1}(b) &= k \text{라고 하면, } f(k) = b \\
 \therefore k &= c \\
 \therefore f^{-1}(f^{-1}(b)) &= f^{-1}(c) \\
 \text{또, } f^{-1}(c) &= t \text{라고 하면, } f(t) = c \\
 \therefore t &= d \\
 \therefore (f \circ f)^{-1}(b) &= d
 \end{aligned}$$

12. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 $f(x) = |x|$ 라 하자. 이때 함수 f 의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$ 이므로 함수 f 의 치역은 $\{0, 1, 2\}$ 이다.
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8$ (개)이다.

13. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서
 $3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$
 $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5, -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

14. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$

② $y = x^2$

③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$

⑤ $y = \frac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
 x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

15. 두 함수 $f(x) = -3x + k$, $g(x) = 2x + 4$ 에 대하여, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 하는 k 의 값은 얼마인가?

① -16 ② -14 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x + k, \quad g(x) = 2x + 4 \text{에서} \\ (f \circ g)(x) &= f(2x + 4) = -3(2x + 4) + k \\ &= -6x - 12 + k \cdots \text{㉠} \\ (g \circ f)(x) &= g(-3x + k) = 2(-3x + k) + 4 \\ &= -6x + 2k + 4 \cdots \text{㉡} \\ \text{㉠과 ㉡이 같아야 하므로} \\ -6x - 12 + k &= -6x + 2k + 4 \\ \therefore k &= -16 \end{aligned}$$

16. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

- ㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.
- ㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.
- ㉢ 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$
㉢. $f: X \rightarrow Y, f^{-1}: Y \rightarrow X$ 이므로,
 $f \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y, f^{-1} \circ f: X \rightarrow X$
그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.
 $\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$
따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

17. 함수 f 의 정의역이 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 이고,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in Q) \\ 1 & (x \notin Q) \end{cases} \text{이라고 한다. 위 함수의 그래프에 대한 설명 중}$$

맞는 것은?(Q 는 유리수 전체의 집합)

- ① 부등식 $y \geq x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.
- ② 부등식 $y \geq x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다
- ③ 부등식 $y \geq x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 무수히 많다.
- ④ 부등식 $y < x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.
- ⑤ 부등식 $y < x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다.

해설

함수 f 의 그래프를 그리면 y 값이 0, 1 인 점이 조밀하게 평면 위에 있다.

따라서 부등식 $y \geq x, y < x$ 의 영역 안에도 무수히 많다

18. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{y|y \text{는 정수}\}$ 에 대하여 두 함수 f, g 를 X 에서 Y 로의 함수로 정의한다. $f(x) = x - 1$, $g(x) = ax^2 + bx + c$ 라 할 때, $f = g$ 가 되도록 하는 상수 a, b, c 의 곱 abc 를 구하면?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$f = g$ 에서
 $f(-1) = g(-1), f(0) = g(0), f(1) = g(1)$ 이므로
 $f(-1) = g(-1)$ 에서 $-2 = a - b + c \cdots \textcircled{1}$
 $f(0) = g(0)$ 에서 $-1 = c \cdots \textcircled{2}$
 $f(1) = g(1)$ 에서 $0 = a + b + c \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $a = 0, b = 1, c = -1$
 $\therefore abc = 0$

19. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중에서 일대일 대응의 개수를 m , 상수함수의 개수를 n 이라 할 때, $m - n$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

일대일 대응의 개수는 a, b, c 를 나열하는
방법의 수와 같으므로 $m = 6$
상수함수의 개수는 치역이 a, b, c 인 경우의 3가지
 $\therefore m = 6$
따라서 $m - n = 6 - 3 = 3$

20. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 중 일대일 대응의 개수는 (가) 이고, 항등함수의 개수는 (나) 이며 상수함수의 개수는 (다) 이다. 이때, (가)~(다)에 알맞은 수를 순서대로 적은 것은?

- ① 6, 3, 3
- ② 6, 3, 1
- ③ 6, 1, 3
- ④ 27, 3, 1
- ⑤ 27, 1, 3

해설

(i) 일대일 대응 $f : X \rightarrow X$ 라 하면
 $f(-1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $-1, 0, 1$ 중 하나이므로 3개
 $f(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$ 의 값을 제외한 2개
 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 1개이다.
따라서, 일대일 대응의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (개)
(ii) 항등함수 $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 의 1개
(iii) 상수함수 : $x \in X$ 일 때
 $f(x) = -1$ 또는 $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 1$ 의 3개
따라서, (가), (나), (다)에 알맞은 수는 차례로 6, 1, 3이다.

21. $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 라고 할 때, X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수와 X 에서 Y 로 대응되는 일대일 함수의 개수를 더한 값은?

① 87 ② 88 ③ 105 ④ 144 ⑤ 267

해설

함수 a, b, c 모두 선택 가능한 개수는 4 가지 이다.
그리고 각각을 선택하는 사건은 동시에 일어나는 것이다.
 $\therefore 4 \times 4 \times 4 = 64$ 가지
일대일 함수 : $a \neq b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$ 이므로
 a 가 선택 가능한 개수 : 4
 b 가 선택 가능한 개수 : 3
 c 가 선택 가능한 개수 : 2
이 경우 역시 각각의 사건 모두 동시에 일어난다.
 $\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$ 가지
 $\therefore 64 + 24 = 88$

22. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 보기의 X 에서 X 로의 함수 중
항등함수인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = x$

㉡ $g(x) = x^3$

㉢ $h(x) = x^2 + 2$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉢

해설

㉠ $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 이므로
 $f(x)$ 는 항등함수이다.

㉡ $g(-1) = -1, g(0) = 0, g(1) = 1$ 이므로
 $g(x)$ 는 항등함수이다.

㉢ $h(-1) = 3, h(0) = 2, h(1) = 3$ 이므로
 $h(x)$ 는 항등함수가 아니다.

23. 두 함수 $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -3x + k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -20 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \text{에서} \\ -6x + 2k + 5 &= -6x - 15 + k \\ \therefore k &= -20\end{aligned}$$

24. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{에서 } 2ax + 1 = 2ax + 3a - 1$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

25. 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = x^2 - 1$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 실수 a 의 값을 정하면?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ 1 ⑤ 4

해설

$g \circ f = f \circ g$ 에서
 $(x + a)^2 - 1 = x^2 - 1 + a$,
 $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = x^2 - 1 + a$
즉 $2ax + a^2 - a = 0$
모든 실수 x 에 대해 성립하려면 $a = 0$

26. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 6x-5$ 를 만족시킬 때, $f(4)$ 의 값은 얼마인가?

① -8

② -3

③ 1

④ 4

⑤ 9

해설

$f(2x+1) = 6x-5 \cdots \cdots \textcircled{1}$ 에서
 $2x+1 = 4$ 를 만족시키는 x 의 값은

$$x = \frac{3}{2}$$

따라서, $x = \frac{3}{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$f(4) = 6 \times \frac{3}{2} - 5 = 4$$

27. 함수 $f(x) = -x$, $g(x) = 2x - 1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

- ① $y = \frac{1}{4}x + 2$ ② $y = \frac{1}{4}x - 2$ ③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,
 $(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h \circ g = I$
즉 $(h \circ g)(x) = x$, $a(2x - 1) + b = x$
 $x = 1$ 일 때, $a + b = 1$
 $x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$
 $\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$
따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

28. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$

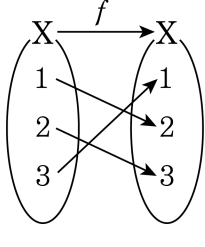
④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1, g(x) = 3x - 2 \text{ 일 때,} \\ (g \circ h)(x) &= f(x) \text{ 를 만족해야 하므로} \\ (g \circ h)(x) &= g(h(x)) = 3h(x) - 2 \\ 3h(x) - 2 &= x + 1, 3h(x) = x + 3 \\ \therefore h(x) &= \frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$

29. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의한다.



$f^1(x) = f(x), f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ 라 할 때, $f^{100}(1) - f^{200}(3)$ 의 값은?

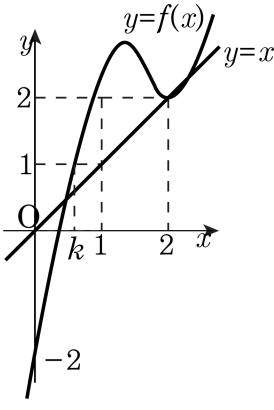
- ① -2
- ② 2
- ③ -1
- ④ 1
- ⑤ 0

해설

위 그림과 같이 대응관계를 이용하여 합성함수의 값을 구하면
 $f^3(1) = f(f(f(1))) = f(f(2)) = f(3) = 1$
같은 방법으로 $f^3(2) = 2, f^3(3) = 3$ 이다.
 $\therefore f^3(x) = x$ 이므로
 $f^{100}(x) = (f^{3 \cdot 33} \circ f)(x) = f(x)$,
 $f^{200}(x) = (f^{3 \cdot 66} \circ f^2)(x) = f^2(x)$
 $\therefore f^{100}(1) = f(1) = 2, f^{200}(3) = f^2(3) = f(f(3)) = f(1) = 2$
 $\therefore f^{100}(1) - f^{200}(3) = 2 - 2 = 0$

30. 다음 그림과 같이 함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 2$ 에서 $f(k) = 1$ 일 때,

$f^{10}(k)$ 의 값은?(단, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f^2 \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ 11

해설

$$\begin{aligned} f(k) &= 1 \\ f^2(k) &= f(f(k)) = f(1) = 2 \\ f^3(k) &= f^2 \circ f(k) = f^2(f(k)) = f^2(1) \\ &= f(f(1)) = f(2) = 2 \\ &\vdots \\ f^{10}(k) &= 2 \end{aligned}$$

31. 함수 f, g 가 모든 실수 x 에 대하여 식 $(f \circ g)(x) = x$ 를 만족한다.
 $f(x) = 3x + 1$ 일 때, $g(3)$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$$(f \circ g)(x) = x \text{ 이므로 } g = f^{-1}$$

$$g(3) = f^{-1}(3) = a \text{ 라 하면}$$

$$f(a) = 3 \text{ 이므로 } 3a + 1 = 3$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

32. 두 함수 $f(x) = 2x - 1, g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)^{-1}(-2)$ 의 값은 얼마인가?

- ㉠ $-\frac{5}{2}$ ㉡ $-\frac{3}{2}$ ㉢ $\frac{3}{2}$ ㉣ $\frac{5}{2}$ ㉤ $\frac{7}{2}$

해설

$(f \circ g)(x) = h(x)$ 라 하자.

$$h(x) = f(g(x)) = 2(x + 2) - 1 = 2x + 3$$

$h(x)$ 의 역함수를 구하면

$$y = 2x + 3$$

$$\Rightarrow x = 2y + 3$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$\therefore h^{-1}(-2) = -\frac{5}{2}$$

33. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 이고, $f : A \rightarrow A$ 인 함수 f 가 역함수 f^{-1} 를 가질 때, $f^{-1}(1) + f^{-1}(2) + f^{-1}(3) + f^{-1}(4)$ 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

함수 f 는 역함수를 가지므로
일대일 대응이 된다.
따라서 $f^{-1}(1) + f^{-1}(2) + f^{-1}(3) + f^{-1}(4)$ 은
정의역의 원소 합과 같으므로
 $\therefore f^{-1}(1) + f^{-1}(2) + f^{-1}(3) + f^{-1}(4)$
 $= 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

34. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^3 + 1$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(2)$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(2) = x \text{ 로 놓으면}$$

$$(g \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g)(2) = x$$

$$(f^{-1} \circ g)(2) = x$$

$$g(2) = f(x)$$

$$2^3 + 1 = 2x - 1 \text{ 에서 } 9 = 2x - 1$$

$$\therefore x = 5$$

35. $f(x) = -x, g(x) = 1 - \frac{2}{x}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = (g^{-1} \circ f \circ g)(x)$ 로 정의 할 때, $(h \circ h)(x)$ 는 무엇인가?

- ① x
- ② $x + 1$
- ③ $x + 2$
- ④ $x + 3$
- ⑤ $x + 4$

해설

$$h = g^{-1} \circ f \circ g \text{ 에서}$$
$$h \circ h = (g^{-1} \circ f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g)$$
$$= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)$$
$$(h \circ h)(x) = (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)(x)$$
$$= (g^{-1} \circ (f \circ f))(g(x))$$
$$= g^{-1}((f \circ f)(g(x)))$$
$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -f(x) = -(-x) = x \text{ 이므로 } (h \circ h)(x) = g^{-1}(g(x)) = x$$

36. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$
 $f(x) = a(x - 6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$ 로 놓으면
 $f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$
 $\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1, -6a^2 - 8a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x + 4$ 이므로
 $f(-1) = -(-1) + 4 = 5$

37. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & (x \text{는 유리수}) \\ x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \quad \text{로 정의될 때, } f(x) + f(2-x) \text{ 의 값}$$

은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} 2-x & (x \text{는 유리수}) \\ x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \quad \text{에서}$$

(i) x 가 유리수일 때, $2-x$ 도 유리수이므로

$$f(x) + f(2-x) = (2-x) + \{2-(2-x)\} = 2$$

(ii) x 가 무리수일 때, $2-x$ 도 무리수이므로

$$f(x) + f(2-x) = x + (2-x) = 2$$

(i), (ii)에서 $f(x) + f(2-x) = 2$

38. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$

이다. $f\left(\frac{4-x}{3}\right) = ax + b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

- ① -36 ② -20 ③ -4 ④ 20 ⑤ 36

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$ 에서 $\frac{x+1}{2} = t$ 라고 하면 $x = 2t - 1$ 이므로

$$f(t) = 6(2t - 1) - 1 = 12t - 7 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

①에 t 대신에 $\frac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$$f\left(\frac{4-x}{3}\right) = 12\left(\frac{4-x}{3}\right) - 7 = 16 - 4x - 7 = -4x + 9$$

$$\therefore ab = (-4) \cdot 9 = -36$$

39. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = x + 2$ 에 대하여
 $f^n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_n(x)$ (x 은 자연수) 라 할 때, $f^{2007}(1)$ 의 값은?
(단, 밑줄 그은부분의 f 갯수는 n 개)

- ① 2007 ② 2008 ③ 2009 ④ 4015 ⑤ 4016

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2 \\ f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x + 2) + 2 = x + 4 \\ f^3(x) &= (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = (x + 4) + 2 = x + 6 \\ f^4(x) &= (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x)) = (x + 6) + 2 = x + 8 \\ &\vdots \\ f^n(x) &= x + 2n \\ \therefore f^{2007}(1) &= 1 + 2 \times 2007 = 4015 \end{aligned}$$

40. $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f_{n+1}(x) = f_1 \circ f_n(x) (n = 1, 2, 3, \dots)$ 라 할때 $f_{2008}(1)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2007}$ ② $\frac{1}{2008}$ ③ $\frac{1}{2009}$ ④ $\frac{1}{4017}$ ⑤ $\frac{1}{4018}$

해설

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1} \text{ 에서}$$

$$f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = f_1\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = (f_1 \cdot f_2)(x)$$

$$= f_1\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$\vdots$

이상에서 $f_{2008}(x)$ 를 추정하면

$$f_{2008}(x) = \frac{x}{2008x+1}$$

$$\therefore f_{2008}(1) = \frac{1}{2008 \times 1 + 1} = \frac{1}{2009}$$