1. 두 집합 $X = \{-2,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 대응 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?

① $x \to x+1$ ② $x \to x^2$ ③ $x \to x-1$

④ $x \to x+2$ ⑤ $x \to 2x+1$

해설

각각의 치역을 구하면

① $\{-1,\ 1,\ 2\}$

② $\{0,\ 1,\ 4\}$

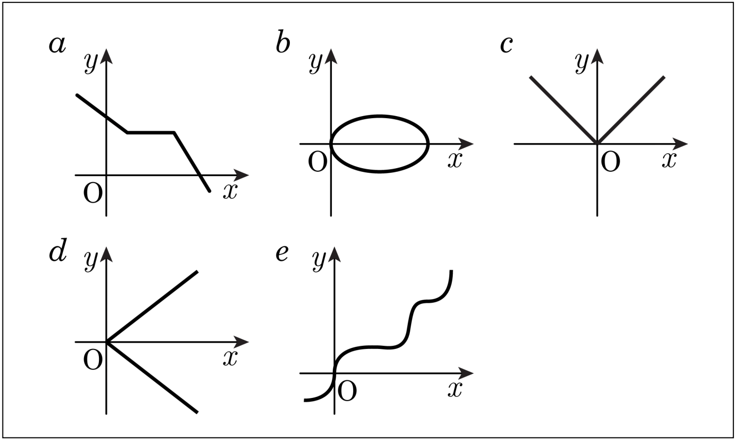
③ $\{-3,\ -1,\ 0\}$

④ $\{0,\ 2,\ 3\}$

⑤ $\{-3,\ 1,\ 3\}$

따라서 주어진 조건을 만족하는 함수는 ④ 이다.

2. 다음 그래프 중 함수인 것은?

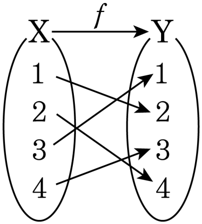


① a, b, c ② a, c, e ③ a, c, d ④ b, c, e ⑤ c, d, e

해설

[a] 함수 [b] 함수가 아니다. [c] 함수 [d] 함수가 아니다. [e] 함수
따라서 [a], [c], [e]만이 함수이다.

3. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?



① 함수이다.

② 정의역은 {1, 2, 3, 4} 이다.

③ 공역은 {1, 2, 3, 4} 이다.

④ 치역은 {1, 2, 4} 이다.

⑤ 일대일 대응이다.

해설

① 주어진 대응 x의 각 원소에 y가 1개씩 대응 하므로 함수이다.
②, ③ 정의역과 공역은 모두 {1, 2, 3, 4}이다.
④ 치역은 {1, 2, 3, 4}이다.
⑤ 집합 X의 각 원소에 대한 함숫값이 모두 다르므로 일대일대응이다.

4. $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 함수 $f:X\rightarrow Y$, $f(x)=|2x-3|$으로 주어질 때, 다음 중 $f(X)$의 원소가 아닌 것은 무엇인가? (단, $f(X)$는 함수 f의 치역)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$f(x)=|2x-3|$에서

$f(1)=1,\ f(2)=1,\ f(3)=3,\ f(4)=5,\ f(5)=7$ 이므로

$f(X)=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

$\therefore\ 2\notin f(X)$

5. 집합 $X = \{x|x$는 자연수$\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 는 상수함수이다. $f(2) = 2$ 일 때, $f(1) + f(3) + f(5) + \cdots + f(19)$ 의 값은 얼마인가?

① 100 ② 50 ③ 38 ④ 20 ⑤ 10

해설

$f(x)$ 가 상수함수이므로,

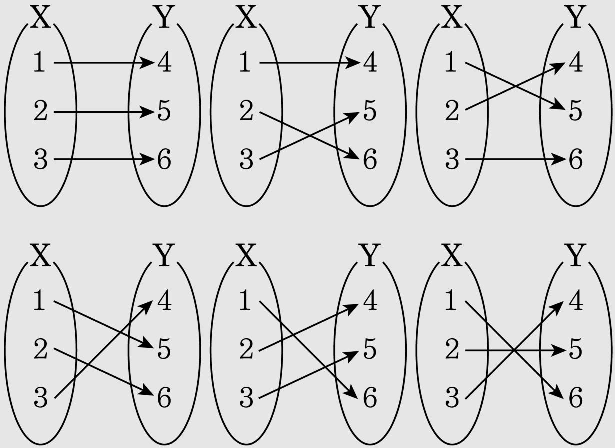
$f(1) = F(3) = \cdots = F(19) = 2$

$\therefore f(1) + f(3) + \cdots + f(19) = 2 \cdot 10 = 20$

6. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 일대일 대응은 몇 가지인가?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설



$\therefore$ 6가지

7. 두 함수 $f(x)=2x+1$, $g(x)=-3x+2$ 의 합성함수 $g\circ f$ 를 구하면 무엇인가?

① $y=-6x-1$ ② $y=-6x$ ③ $y=-6x+1$

④ $y=-6x+3$ ⑤ $y=-6x+5$

해설

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=-3(2x+1)+2=-6x-1$ 이다.

8. 함수 $f(x)=x^2+x-2$ 에 대하여 $f(f(1))+f(f(-2))$ 의 값은?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$f(x)=(x-1)(x+2)$ 에서

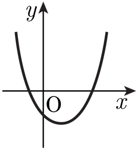
$f(1)=0, f(-2)=0, f(0)=-2$ 이고

$f(f(1))=f(f(-2))=f(0)$ 이다.

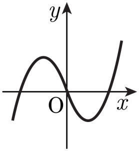
$\therefore f(f(1))+f(f(-2))=2f(0)=-4$

9. 다음 그래프 중에서 실수전체 집합에서 역함수가 존재하는 함수의 그래프는?

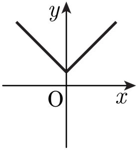
①



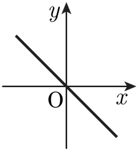
②



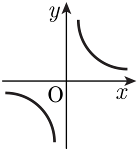
③



④



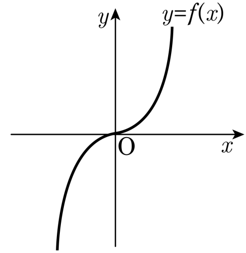
⑤



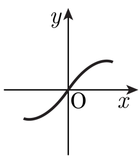
해설

역함수가 존재하려면 함수가 일대일 대응이어야 한다.
일대일 대응이란 변수 x, y가 서로 하나씩 대응되는 것으로 ④에 해당된다.
⑤번은 $x = 0$ 에 대응되는 y가 없다.

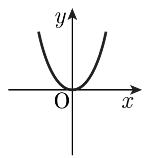
10. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프로 적당한 것은 무엇인가?



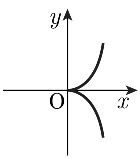
①



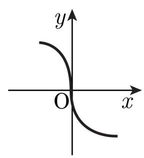
②



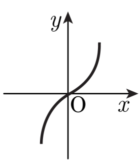
③



④



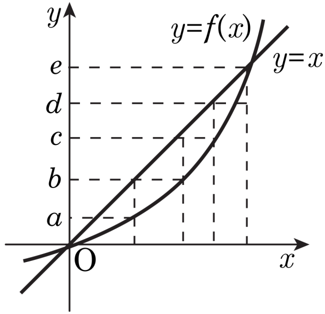
⑤



해설

$y=f(x)$ 의 그래프와
그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

11. 다음 그림은 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프이다. $(f\cdot f)^{-1}(b)$ 의 값은?



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f\cdot f)^{-1}(b)=(f^{-1}\cdot f^{-1})(b)$
$=f^{-1}(f^{-1}(b))$
$f^{-1}(b)=k$ 라고 하면, $f(k)=b$
$\therefore\ k=c$
$\therefore\ f^{-1}(f^{-1}(b))=f^{-1}(c)$
또, $f^{-1}(c)=t$ 라고 하면, $f(t)=c$
$\therefore\ t=d$
$\therefore\ (f\cdot f)^{-1}(b)=d$

12. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$를 $f(x) = |x|$라 하자. 이때 함수 f의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(2) = 2$이므로 함수 f의 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8$(개)이다.

13. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2-10x-5$, $g(x)=-x^2+2x+10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x)=g(x)$이므로

$2x^2-10x-5=-x^2+2x+10$에서

$3x^2-12x-15=0$, $3(x^2-4x-5)=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$\therefore\ x=5,\ -1$

즉, $x=5$ 또는 $x=-1$일 때 $f(x)=g(x)$이다.

$\therefore\ X=\{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

14. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$　② $y = x^2$　③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$　⑤ $y = \dfrac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

15. 두 함수 $f(x)=-3x+k,\ g(x)=2x+4$에 대하여, $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$가 성립하도록 하는 k의 값은 얼마인가?

① -16 ② -14 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$f(x)=-3x+k,\ \ g(x)=2x+4$에서

$(f\circ g)(x)=f(2x+4)=-3(2x+4)+k$

$=-6x-12+k\cdots$ ㉠

$(g\circ f)(x)=g(-3x+k)=2(-3x+k)+4$

$=-6x+2k+4\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$-6x-12+k=-6x+2k+4$

$\therefore k=-16$

16. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.

㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.

㉢ 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면
$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
④ ㉡,㉢ ⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$
㉢. $f : X \to Y, f^{-1} : Y \to X$ 이므로,
$f \circ f^{-1} : Y \to Y, f^{-1} \circ f : X \to X$
그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.
$\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$
따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

17. 함수 f 의 정의역이 $A=\{x\mid 0\le x\le 1\}$이고,

$f(x)=\begin{cases}0 & (x\in Q)\\ 1 & (x\notin Q)\end{cases}$ 이라고 한다. 위 함수의 그래프에 대한 설명 중 맞는 것은?(Q는 유리수 전체의 집합)

① 부등식 $y\ge x(0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.

② 부등식 $y\ge x(0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다

③ 부등식 $y\ge x(0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 무수히 많다.

④ 부등식 $y<x(0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.

⑤ 부등식 $y<x(0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다.

해설

함수 f 의 그래프를 그리면 y값이 0, 1인 점이 조밀하게 평면 위에 있다.
따라서 부등식 $y\ge x$, $y<x$ 의 영역 안에도 무수히 많다

18. 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{y|y$는 정수$\}$에 대하여 두 함수 $f,\ g$를 X에서 Y로의 함수로 정의한다. $f(x)=x-1,\ g(x)=ax^2+bx+c$라 할 때, $f=g$가 되도록 하는 상수 $a,\ b,\ c$의 곱 abc를 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$f=g$에서

$f(-1)=g(-1),\ f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$이므로

$f(-1)=g(-1)$에서 $-2=a-b+c\cdots$ ㉠

$f(0)=g(0)$ 에서 $-1=c\cdots$ ㉡

$f(1)=g(1)$ 에서 $0=a+b+c\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=0,\ b=1,\ c=-1$

$\therefore abc=0$

19. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{a,\ b,\ c\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 중에서 일대일 대응의 개수를 m, 상수함수의 개수를 n이라 할 때, $m-n$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

일대일 대응의 개수는 a, b, c를 나열하는 방법의 수와 같으므로 $m=6$

상수함수의 개수는 치역이 a, b, c인 경우의 3가지

$\therefore\ m=3$

따라서 $m-n=6-3=3$

20. 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일 대응의 개수는 (가) 이고, 항등함수의 개수는 (나) 이며 상수함수의 개수는 (다) 이다. 이때, (가) ~ (다)에 알맞은 수를 순서대로 적은 것은?

① 6, 3, 3 ② 6, 3, 1 ③ 6, 1, 3

④ 27, 3, 1 ⑤ 27, 1, 3

해설

(i) 일대일 대응 $f : X \rightarrow X$ 라 하면

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1,\ 0,\ 1$중 하나이므로 3개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$의 값을 제외한 2개

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1),\ f(2)$의 값을 제외한 1개이다.

따라서, 일대일 대응의 개수는 $3\times2\times1=6$(개)

(ii) 항등함수 $f(-1)=-1, f(0)=0,\ f(1)=1$의 1개

(iii) 상수함수 : $x\in X$일 때

$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=1$의 3개

따라서, (가), (나), (다)에 알맞은 수는 차례로 6, 1, 3이다.

21. $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$라고 할 때, X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수와 X 에서 Y 로 대응되는 일대일 함수의 개수를 더한 값은?

① 87　② 88　③ 105　④ 144　⑤ 267

해설

함수 a,b,c 모두 선택 가능한 개수는 4 가지 이다.
그리고 각각을 선택하는 사건은 동시에 일어나는 것이다.
$\therefore 4\times4\times4=64$ 가지
일대일 함수 : $a\neq b$ 이면 $f(a)\neq f(b)$ 이므로
a 가 선택 가능한 개수 : 4
b 가 선택 가능한 개수 ; 3
c 가 선택 가능한 개수 : 2
이 경우 역시 각각의 사건 모두 동시에 일어난다.
$\therefore\ 4\times3\times2=24$ 가지
$\therefore\ 64+24=88$

22. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 다음 보기의 X 에서 X 로의 함수 중 항등함수인 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $f(x) = x$　　　ㄴ $g(x) = x^3$

ㄷ $h(x) = x^2 + 2$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

해설

ㄱ $f(-1) = -1,\ \ f(0) = 0,\ f(1) = 1$ 이므로
$f(x)$는 항등함수이다.

ㄴ $g(-1) = -1,\ \ g(0) = 0,\ g(1) = 1$ 이므로
$g(x)$는 항등함수이다.

ㄷ $h(-1) = 3,\ \ h(0) = 2,\ h(1) = 3$ 이므로
$h(x)$는 항등함수가 아니다.

23. 두 함수 $f(x)=2x+5$, $g(x)=-3x+k$에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -20 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 20

해설

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$에서

$-6x+2k+5=-6x-15+k$

$\therefore\ k=-20$

24. 두 함수 $f(x)=2x+3$, $g(x)=ax-1$에 대하여 $f\circ g=g\circ f$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{1}{3}$　③ 1　④ $-\frac{1}{3}$　⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$f\circ g=g\circ f$에서 $2ax+1=2ax+3a-1$

$\therefore\ a=\frac{2}{3}$

25. 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = x^2 - 1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$가 성립하도록 실수 a의 값을 정하면?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ 1 ⑤ 4

해설

$g \circ f = f \circ g$에서

$(x+a)^2 - 1 = x^2 - 1 + a$,

$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = x^2 - 1 + a$

즉 $2ax + a^2 - a = 0$

모든 실수 x에 대해 성립하려면 $a = 0$

26. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(2x+1) = 6x-5$를 만족시킬 때, $f(4)$의 값은 얼마인가?

① -8　② -3　③ 1　④ 4　⑤ 9

해설

$f(2x+1) = 6x-5 \cdots\cdots$ ㉠ 에서

$2x+1=4$ 를 만족시키는 x 의 값은

$x = \dfrac{3}{2}$

따라서, $x = \dfrac{3}{2}$ 을 ㉠에 대입하면,

$f(4) = 6 \times \dfrac{3}{2} - 5 = 4$

27. 함수 $f(x) = -x,\ g(x) = 2x-1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $y = \frac{1}{4}x + 2$ ② $y = \frac{1}{4}x - 2$ ③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,

$(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h \circ g = I$

즉 $(h \circ g)(x) = x,\ a(2x-1) + b = x$

$x = 1$ 일 때, $a + b = 1$

$x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$

$\therefore\ a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$

따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

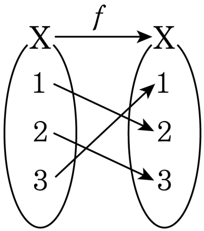
28. $f(x)=x+1$, $g(x)=3x-2$ 일 때, $(g\circ h)(x)=f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x)=\frac{1}{3}x+1$
② $h(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$
③ $h(x)=x+\frac{1}{3}$
④ $h(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$
⑤ $h(x)=\frac{2}{3}x+1$

해설

$f(x)=x+1$, $g(x)=3x-2$ 일 때,
$(g\circ h)(x)=f(x)$ 를 만족해야 하므로
$(g\circ h)(x)=g(h(x))=3h(x)-2$
$3h(x)-2=x+1$, $3h(x)=x+3$
$\therefore h(x)=\frac{1}{3}x+1$

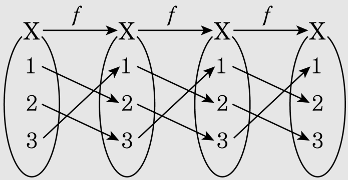
29. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$를 다음과 같이 정의한다.



$f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$라 할 때, $f^{100}(1) - f^{200}(3)$ 의 값은?

① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 0

해설



위 그림과 같이 대응관계를 이용하여 합성함수의 값을 구하면

$f^3(1) = f(f(f(1))) = f(f(2)) = f(3) = 1$

같은 방법으로 $f^3(2) = 2$, $f^3(3) = 3$ 이다.

$\therefore f^3(x) = x$ 이므로

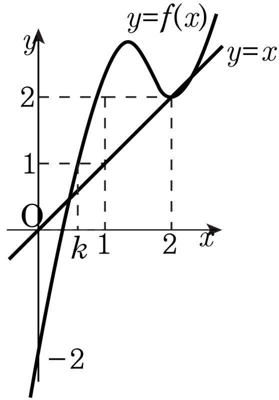
$f^{100}(x) = (f^{3 \cdot 33} \circ f)(x) = f(x)$,

$f^{200}(x) = (f^{3 \cdot 66} \circ f^2)(x) = f^2(x)$

$\therefore f^{100}(1) = f(1) = 2$, $f^{200}(3) = f^2(3) = f(f(3)) = f(1) = 2$

$\therefore f^{100}(1) - f^{200}(3) = 2 - 2 = 0$

30. 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=x^3-5x^2+8x-2$ 에서 $f(k)=1$ 일 때, $f^{10}(k)$ 의 값은?(단, $f^2=f\circ f,\ f^3=f^2\circ f,\ f^n=f^{n-1}\circ f$)



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ 11

해설

$f(k)=1$

$f^2(k)=f(f(k))=f(1)=2$

$f^3(k)=f^2\circ f(k)=f^2(f(k))=f^2(1)$

$\quad\quad=f(f(1))=f(2)=2$

$\vdots$

$f^{10}(k)=2$

31. 함수 f, g 가 모든 실수 x 에 대하여 식$(f \circ g)(x) = x$ 를 만족한다. $f(x) = 3x + 1$ 일 때, $g(3)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$(f \circ g)(x) = x$ 이므로 $g = f^{-1}$

$g(3) = f^{-1}(3) = a$ 라 하면

$f(a) = 3$ 이므로 $3a + 1 = 3$

$\therefore\ a = \frac{2}{3}$

32. 두 함수 $f(x)=2x-1, g(x)=x+2$ 에 대하여 $(f\circ g)^{-1}(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$(f\circ g)(x)=h(x)$ 라 하자.

$h(x)=f(g(x))=2(x+2)-1=2x+3$

$h(x)$ 의 역함수를 구하면

$y=2x+3$

$\Rightarrow \quad x=2y+3$

$\Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad h^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

$\therefore \quad h^{-1}(-2)=-\frac{5}{2}$

33. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 이고, $f:A \to A$ 인 함수 f 가 역함수 f^{-1} 를 가질 때, $f^{-1}(1)+f^{-1}(2)+f^{-1}(3)+f^{-1}(4)$ 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

함수 f 는 역함수를 가지므로
일대일 대응이 된다.
따라서 $f^{-1}(1)+f^{-1}(2)+f^{-1}(3)+f^{-1}(4)$ 은
정의역의 원소 합과 같으므로
$\therefore\ f^{-1}(1)+f^{-1}(2)+f^{-1}(3)+f^{-1}(4)$
$=1+2+3+4=10$

34. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^3 + 1$ 에 대하여 $\left(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g\right)(2)$ 의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

$\left(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g\right)(2) = x$ 로 놓으면

$\left(g \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g\right)(2) = x$

$\left(f^{-1} \circ g\right)(2) = x$

$g(2) = f(x)$

$2^3 + 1 = 2x - 1$ 에서 $9 = 2x - 1$

$\therefore \ x = 5$

35. $f(x) = -x, g(x) = 1 - \frac{2}{x}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = \left(g^{-1} \circ f \circ g\right)(x)$ 로 정의 할 때, $(h \circ h)(x)$ 는 무엇인가?

① x　　② $x+1$　　③ $x+2$　　④ $x+3$　　⑤ $x+4$

해설

$h = g^{-1} \circ f \circ g$ 에서

$$\begin{aligned} h \circ h &= (g^{-1} \circ f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g) \\ &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \circ h)(x) &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)(x) \\ &= (g^{-1} \circ (f \circ f))(g(x)) \\ &= g^{-1}((f \circ f)(g(x))) \end{aligned}$$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -f(x) = -(-x) = x$ 이므로 $(h \circ h)(x) = g^{-1}(g(x)) = x$

36. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = a(x-6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$ 로 놓으면

$f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$

$\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$

즉, $a^2 = 1$, $-6a^2 - 8a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$

따라서 $f(x) = -x + 4$ 이므로

$f(-1) = -(-1) + 4 = 5$

37. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & (x\text{는 유리수}) \\ x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$$

로 정의될 때, $f(x)+f(2-x)$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

함수 $f(x) = \begin{cases} 2-x & (x\text{는 유리수}) \\ x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 에서

(i) x 가 유리수일 때, $2-x$ 도 유리수이므로

$$f(x)+f(2-x) = (2-x)+\{2-(2-x)\} = 2$$

(ii) x 가 무리수일 때, $2-x$ 도 무리수이므로

$$f(x)+f(2-x) = x+(2-x) = 2$$

(i), (ii) 에서 $f(x)+f(2-x) = 2$

38. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=6x-1$ 이다. $f\left(\dfrac{4-x}{3}\right)=ax+b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -36　② -20　③ -4　④ 20　⑤ 36

해설

$f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=6x-1$ 에서 $\dfrac{x+1}{2}=t$ 라고 하면 $x=2t-1$ 이므로

$f(t)=6(2t-1)-1=12t-7$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 t 대신에 $\dfrac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$$f\left(\dfrac{4-x}{3}\right)=12\left(\dfrac{4-x}{3}\right)-7=16-4x-7=-4x+9$$

$\therefore\ ab=(-4)\cdot 9=-36$

39. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=x+2$ 에 대하여 $f^n(x)=\underline{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}(x)$($x$은 자연수) 라 할 때, $f^{2007}(1)$ 의 값은?
(단, 밑줄 그은부분의 f 갯수는 n개)

① 2007 ② 2008 ③ 2009 ④ 4015 ⑤ 4016

해설

$f(x)=x+2$
$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=(x+2)+2=x+4$
$f^3(x)=\left(f\circ f^2\right)(x)=f(f^2(x))=(x+4)+2=x+6$
$f^4(x)=\left(f\circ f^3\right)(x)=f(f^3(x))=(x+6)+2=x+8$

$\vdots$

$f^n(x)=x+2n$
$\therefore f^{2007}(1)=1+2\times 2007=4015$

40. $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f_{n+1}(x) = f_1 \circ f_n(x)(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 라 할때 $f_{2008}(1)$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{2007}$ ② $\dfrac{1}{2008}$ ③ $\dfrac{1}{2009}$ ④ $\dfrac{1}{4017}$ ⑤ $\dfrac{1}{4018}$

해설

$f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에서

$$f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = f_1\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = (f_1 \cdot f_2)(x)$$

$$= f_1\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$$\vdots$$

이상에서 $f_{2008}(x)$ 를 추정하면

$$f_{2008}(x) = \frac{x}{2008x+1}$$

$$\therefore\ f_{2008}(1) = \frac{1}{2008 \times 1 + 1} = \frac{1}{2009}$$