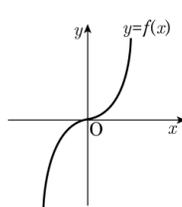
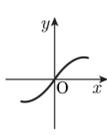


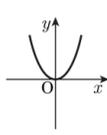
1. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프로 적당한 것은 무엇인가?



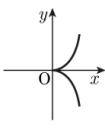
①



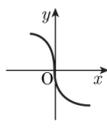
②



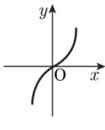
③



④



⑤



해설

$y = f(x)$ 의 그래프와
그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

2. 함수 $f(x) = ax - 1$ 과 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 같도록 상수 a 의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$y = f(x)$ 라 하면 $y = ax - 1$

이것을 x 에 대하여 정리하면 $ax = y + 1$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$$

그런데 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이고 모든 실수에 대하여 성립해야 하므로

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} = ax - 1$$

$\therefore \frac{1}{a} = a$ 이고 $\frac{1}{a} = -1$ 이어야 하므로

$$\therefore a = -1$$

3. 함수 $y = -x - 1$ 의 역함수의 그래프에서 x 절편을 a , y 절편을 b 라 할 때, ab 의 값은 얼마인가?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = -x - 1$ 에서 $x = -y - 1$
여기서 x 와 y 를 바꾸면 역함수는 $y = -x - 1$
따라서 x 절편 $a = -1$, y 절편 $b = -1$ 이므로
 $ab = 1$

4. 함수 $f(x) = ax + 3$ 과 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 같아지도록 하는 상수 a 의 값은 얼마인가?

- ① -3 ② -1 ③ $-\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ 3

해설

$y = ax + 3$ 으로 놓고 x, y 를 서로 바꾸면

$$x = ay + 3, y = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$$

$f(x) = f^{-1}(x)$ 에서

$$ax + 3 = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$$

위의 식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로

$$a = \frac{1}{a}, 3 = -\frac{3}{a}$$

$$\therefore a = -1$$

해설

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이면 $(f \circ f)(x)$ 이므로

$(f \circ f)(x) = I(x) = x$ 가 성립한다.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + 3) = a(ax + 3) + 3$$

$$= a^2x + 3a + 3$$

$$a^2x + 3a + 3 = x \text{에서 } a^2 = 1, 3a + 3 = 0$$

$$\therefore a = -1$$

5. 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 2$ 일 때, $a + b$ 의 값은 얼마인가? (단 a, b 는 실수)

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ 이므로

$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 2$ 의 역함수는

$f(x) = ax + b$ 이다.

$y = \frac{1}{3}x + 2$ 로 놓고 x, y 를 서로 바꾸면

$x = \frac{1}{3}y + 2, y = 3x - 6$

$a = 3, b = -6$

$\therefore a + b = -3$

6. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응인 세 함수 f, g, h 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

- ㉠ $f \circ g = g \circ f$
 ㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
 ㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$
 ㉣ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

- ① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉢, ㉣
 ④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

- ㉠ 일반적으로 함수의 합성에서 교환법칙은 성립하지 않는다.
 \therefore 옳지 않다.
 ㉡ 함수의 합성에서 결합법칙은 성립한다.
 \therefore 옳다.
 ㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$
 \therefore 옳지 않다.
 ㉣ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로
 $f \circ g = I$ 에서 $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$
 $\therefore g = f^{-1} \therefore$ 옳다.

7. 다음 중 옳지 않은 것은 무엇인가?

① $(f^{-1})^{-1} = f$ ② $g \circ f \neq f \circ g$

③ $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ ④ $f \circ f^{-1} = I$

⑤ $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$

해설

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \neq g^{-1} \circ f^{-1}$
즉, 옳지 않은 것은 ③이다.

8. $f(x) = \begin{cases} x(x \leq 0) \\ x^2(x > 0) \end{cases}$, $g(x) = f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x) = g^{-1}(x)$

라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} h(0) &= g^{-1}(0) = k \\ g(k) &= f(k+4) = 0 \\ \therefore k+4 &= 0 \\ \therefore k &= -4 \\ \therefore h(0) &= -4 \end{aligned}$$

9. $f(x) = -x, g(x) = 1 - \frac{2}{x}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = (g^{-1} \circ f \circ g)(x)$ 로 정의 할 때, $(h \circ h)(x)$ 는 무엇인가?

- ① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x+3$ ⑤ $x+4$

해설

$$h = g^{-1} \circ f \circ g \text{ 에서}$$

$$h \circ h = (g^{-1} \circ f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g) \\ = (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)$$

$$(h \circ h)(x) = (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)(x) \\ = (g^{-1} \circ (f \circ f))(g(x)) \\ = g^{-1}((f \circ f)(g(x)))$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -f(x) = -(-x) = x \text{ 이므로 } (h \circ h)(x) = \\ g^{-1}(g(x)) = x$$

10. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$
 $f(x) = a(x - 6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$ 로 놓으면
 $f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$
 $\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1, -6a^2 - 8a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x + 4$ 이므로
 $f(-1) = -(-1) + 4 = 5$