1. 등식 $2x^2-3x-2=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$이 x에 관한 항등식이 되도록 할 때, $2ab$의 값은?

① -6　　② -4　　③ -2　　④ 2　　⑤ 4

해설

양변에 $x=0$을 대입하면, $-2=2a$ $\quad\therefore\ a=-1$
양변에 $x=1$을 대입하면, $-3=-b$ $\quad\therefore\ b=3$
$\therefore\ 2ab=-6$

2. x에 대한 이차방정식 $2mx^2+(5m+2)x+4m+1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값은?

① $-\frac{3}{2},\ -2$　② $-\frac{7}{12},\ -\frac{1}{2}$　③ $-\frac{7}{2},\ 2$　④ $-\frac{2}{7},\ 2$　⑤ $\frac{2}{7},\ \frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$D=(5m+2)^2-4\cdot 2m\cdot(4m+1)=0$

$25m^2+20m+4-32m^2-8m=0$

$7m^2-12m-4=0$

$(7m+2)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{2}{7}$ 또는 2

3. 방정식 $|x| + |x - 1| = 2$의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

ⅰ) $x < 0$일 때,
$-x - (x - 1) = 2$이므로 $-2x + 1 = 2$
$\therefore \ x = -\frac{1}{2}$
ⅱ) $0 \leq x < 1$일 때,
$x - (x - 1) = 2$이므로 $0 \cdot x = 1$
$\therefore$ 해가 없다.
ⅲ) $1 \leq x$일 때,
$x + x - 1 = 2$이므로 $2x = 3$
$\therefore \ x = \frac{3}{2}$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

4. 이차방정식 $3x^2-6x+k=0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \le 3$ ② $k > 3$ ③ $k \le 2$ ④ $k > 2$ ⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$

$3x^2-6x+k=0$

$$\frac{D}{4} = 9 - 3k < 0$$

$\therefore\ k > 3$

5. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$$x^3 - 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ 정수해는 $x = 1$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \le x+4 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

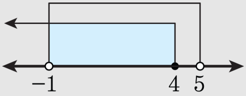
㉠ $2x \le x+4$,

$\therefore x \le 4$

㉡ $x^2-4x-5<0$

$\Rightarrow (x-5)(x+1)<0$

$\therefore -1<x<5$



㉠, ㉡의 범위의

공통범위는 $-1<x\le 4$

$\therefore x=0,1,2,3,4$ 총 5 개

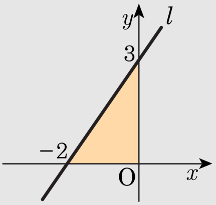
7. 직선 $3x-2y+6=0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x-2y+6=0$을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\dfrac{1}{2}\times 2\times 3=3$

8. 점 $(2,\ 1)$을 지나고 직선 $x-2y+1=0$에 수직인 직선의 식을 구하면?

① $y=2x+5$　② $y=-2x+5$　③ $y=2x-5$

④ $y=5x+2$　⑤ $y=5x-2$

해설

$x-2y+1=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

이 직선에 수직하므로 기울기는 -2

$y-1=-2(x-2)$

$\therefore\ y=-2x+5$

9. x에 관계없이 $\frac{x-a}{2x-b}$가 항상 일정한 값을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\frac{x-a}{2x-b}=k$라 놓으면,

$(2k-1)x+(a-bk)=0$

$\therefore\ 2k-1=0,\ a=bk$이므로

$k=\frac{1}{2},\ a=\frac{1}{2}b$이다.

$\therefore\ \frac{b}{a}=2$

10. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 6이고, $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $6x+1$이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는?

① $6x+7$ ② $-6x+5$ ③ $7x+7$
④ $7x-1$ ⑤ $8x+13$

해설

$f(1)=6,\ f(x)=(x-2)^2q(x)+6x+1$
$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$에서
$f(1)=a+b=6,\ f(2)=2a+b=13$
$\therefore\quad a=7,\ b=-1$
따라서 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는 $7x-1$이다.

11. 다음 보기 중 항상 옳다고 할 수 없는 등식은?

㉠ $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

㉡ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

㉢ $(x^2+x+1)(x^2-x-1)=x^4+x+1$

㉣ $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

㉤ $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

㉢ $x+1=A$로 치환하여 전개하면

$(x^2+A)(x^2-A)=x^4-A^2=x^4-x^2-2x-1$

12. 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ 을 간단히 하여 $a+bi$ 의 꼴로 나타낼 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}$

해설

$$\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$$

$$=(\sqrt{-3}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{-2})-\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$$

$$=\sqrt{-6}\times\sqrt{-6}-\sqrt{-2}-\sqrt{-2}$$

$$=-\sqrt{36}-\sqrt{2}i-\sqrt{2}i=-6-2\sqrt{2}i$$

$$\therefore\ ab=12\sqrt{2}$$

13. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=1\pm i$를 대입하여 정리하면
$1+2i-1+a(1+i)+b=0$과
$a+b+(a+2)i=0$이다.
위 식을 정리하면 $a+b=0$과 $a+2=0$에서
$a=-2, b=2$이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1+i,\ 1-i$
근과 계수의 관계에서
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \qquad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2 \qquad \therefore b=2$

14. 이차함수 $y = kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2$ 의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 정수 k의 값들의 합은?

① -3 ② -5 ③ 7 ④ 3 ⑤ 5

해설

이차방정식 $kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2 = 0$이
서로 다른 두 실근을 가지므로
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\sqrt{2})^2 - k(k+2) > 0$$

$8 - k^2 - 2k > 0$, $(k+4)(k-2) < 0$

$\therefore\ -4 < k < 2$

따라서 정수 k 는 $-3, -2, -1, 0, 1$ 이다.

$\therefore\ (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 = -5$

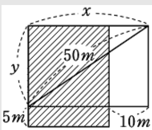
15. 대각선의 길이가 50 m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5 m 늘리고, 가로를 10 m 줄이면 넓이가 50 m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답 : ________ m

▷ 정답 : 48 m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots ㉠ \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore \; x = 2y + 20 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(2y+20)^2 + y^2 = 50^2$

$y^2 + 16y - 420 = 0$

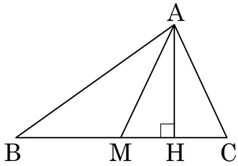
$(y-14)(y+30) = 0$

$\therefore \; y = 14, \; -30$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ㉢에 대입하면 $x = 48$

16. 다음은 예각삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$이 성립함을 보인 것이다.



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라하자.
직각삼각형 ABH에서
$\overline{AB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2$
$= \boxed{\text{(가)}}^2 + \overline{AH}^2$
$= \overline{BM}^2 + 2\overline{BM} \cdot \overline{MH} + \boxed{\text{(나)}}^2 \cdots$ ㉠
직각삼각형 AHC 에서
$\overline{AC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2$
$= \boxed{\text{(다)}}^2 + \overline{AH}^2$
$= \overline{CM}^2 - 2\overline{CM} \cdot \overline{MH} + \boxed{\text{(라)}}^2 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$이다.

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

② (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

③ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

④ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

⑤ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

해설

생략

17. 점 $(2,\ a)$를 지나고 직선 $x+by+2=0$에 수직인 직선의 식이 $2x+y=0$일 때, $a+b$의 값은?

① 5　② 4　③ 8　④ $2\sqrt{2}$　⑤ -6

해설

직선 $2x+y=0$이 $(2,a)$를 지나므로 $a=-4$
한편, 직선 $x+by+2=0$이
직선 $2x+y=0$에 수직이므로
직선 $x+by+2=0$의 기울기는 $-\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$
$\therefore b=-2$ 따라서 $a+b=-6$

18. 지름의 길이가 15 cm 인 원에 내접하며 둘레의 길이가 42 cm 인 직사각형의 두 변의 길이는?

① 6 cm, 8 cm　② 6 cm, 10 cm　③ 6 cm, 12 cm

④ 9 cm, 10 cm　⑤ 9 cm, 12 cm

해설

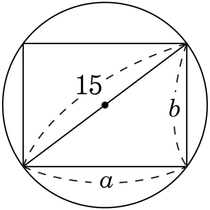
i) $a+b=\dfrac{42}{2}=21$

ii) $a^2+b^2=15^2$

i), ii) 를 연립하면, $a^2+(21-a)^2-225=0$

$\Rightarrow \quad a=12,\ 9$

$\therefore$ 두 변의 길이는 12 cm, 9 cm



19. 좌표평면에서 점 $(3,-1)$을 점 $(1,2)$로 옮기는 평행이동에 의해 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$은 원 $x^2+y^2=1$로 옮겨진다. 이 때, 상수 a,b,c의 합 $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

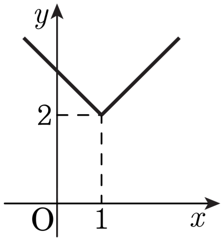
해설

점 $(3,-1)$을 점 $(1,2)$로 옮기는 평행이동은
x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
$x^2+y^2+ax+by+c=0$에서
x 대신에 $x+2$를, y 대신에 $y-3$을 대입하면
$(x+2)^2+(y-3)^2+a(x+2)+b(y-3)+c=0$
정리하면
$x^2+y^2+(a+4)x+(b-6)y+2a-3b+c+13=0$
이 식과 $x^2+y^2=1$이 일치하므로
$a+4=0, b-6=0, 2a-3b+c+13=-1$
$\therefore a=-4,\ b=6,\ c=12$
$\therefore a+b+c=14$

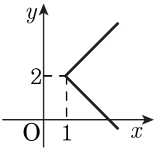
해설

원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=1$
전개하면 $x^2+y^2-4x+6y+12=0$
$\therefore a=-4,\ b=6,\ c=12$

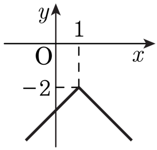
20. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형이 아래 그림과 같을 때, 다음 중 방정식 $f(y, x) = 0$ 이 나타내는 도형은?



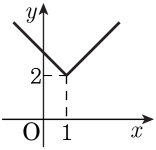
①



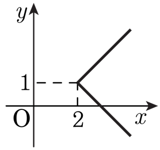
②



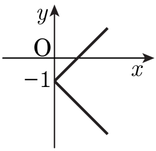
③



④



⑤



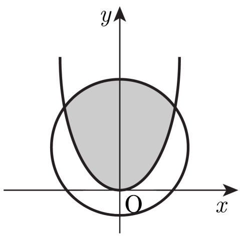
해설

도형 $f(x, y) = 0$ 을 $y = x$ 에 대해 대칭이동하면 $f(y, x) = 0$ 이 된다.
따라서 $(1,\ 2)$ 는 $(2,\ 1)$ 로 이동되며,
도형 전부를 대칭이동하면 4 번의 그림이 된다.

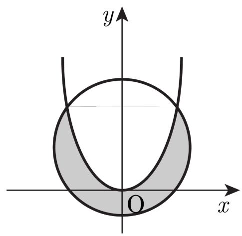
21. 다음 연립부등식의 영역을 옳게 나타낸 것은? (그림의 원은 경계포함, 포물선은 경계제외)

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \le 3 \\ y > x^2 \end{cases}$$

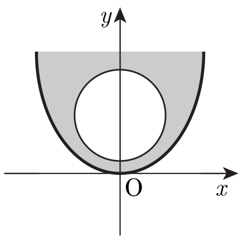
①



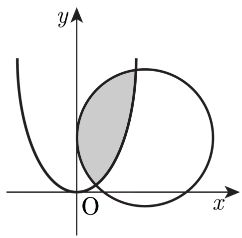
②



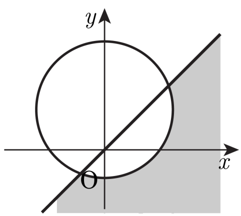
③



④



⑤



해설

$x^2 + (y-1)^2 = 3$ (경계선) 의 내부와 $y = x^2$ 의 윗부분의 겹친 부분이므로 보기에서 ①번 이다.

22. $x^2 + y^2 \le 5$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $2x - y$ 의 최댓값 및 최솟값의 곱은?

① -23 ② -25 ③ -27 ④ -29 ⑤ -31

해설

$2x - y = k$ 라 하면 $y = 2x - k$ 에서
$(-k)$ 는 "기울기 2인 직선의 y 절편"
$x^2 + y^2 = 5$ 의기울기 2 인 접선의 방정식은
$y = 2x \pm \sqrt{5}\sqrt{1+2^2} = 2x \pm 5$
따라서 $-5 \le (y\text{절편}) \le 5$
$\Rightarrow -5 \le -k \le 5$
$\Rightarrow -5 \le k \le 5$
$\therefore$ 최댓값 5 , 최솟값 -5
$-5 \times 5 = -25$

23. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=7$, $x+y=3$ 일 때, x^5+y^5의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서 $3^2=7+2xy$, $xy=1$
$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$에서 $x^3+y^3=18$

$$\begin{aligned} x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y) \\ &= 7\times18-1^2\times3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

24. 두 다항식 $x^2+4x+2k$와 x^2+3x+k의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 k값들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$A=x^2+4x+2k$, $B=x^2+3x+k$라고 하면 $A-B=x+k$
$A-B$는 최대공약수 G를 인수로 갖고,
주어진 조건에서 두 식의 최대공약수가 일차식이므로
두 식의 최대공약수는 $x+k$이다.
A, B는 최대공약수 $x+k$를 인수로 가지므로
A에 $x=-k$를 대입하면
$k^2-2k=0$, $k(k-2)=0$
$\therefore$ $k=0$ 또는 $k=2$
따라서, k값들의 합은 2이다.

25. 집합 $M = \{a + bi | a^2 + b^2 = 1,\ a,\ b$는 실수$\}$ 에 대하여 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

ㄱ $z_1 \in M,\ z_2 \in M$ 이면 $z_1 + z_2 \in M$

ㄴ $z_1 \in M,\ z_2 \in M$ 이면 $z_1 z_2 \in M$

ㄷ $z_1 \in M,\ z_2 \in M$ 이면 $\dfrac{z_1}{z_2} \in M$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$z_1 = a + bi \in M$, $z_2 = c + di \in M$ 이라 하자.

ㄱ $z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$ 에서

$$(a + c)^2 + (b + d)^2$$
$$= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2$$
$$= 2 + 2(ac + bd)\text{이므로}$$

$2 + 2(ac + bd) \neq 1$ 일수 있으므로 $z_1 + z_2 \in M$ 이라 할 수 없다.

ㄴ $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di)$
$$= ac + adi + bci - bd$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)i\text{에서}$$

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$
$$= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2$$
$$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + b^2c^2$$
$$= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = a^2 + b^2 = 1\ (\because c^2 + d^2 = 1\ )$$
$$\therefore\ z_1 \cdot z_2 \in M$$

ㄷ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a + bi}{c + di}$
$$= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$
$$= \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2}$$
$$= (ac + bd) + (bc - ad)i$$
$(\because c^2 + d^2 = 1)$에서

$$(ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$$
$$= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2$$
$$= a^2c^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 = (a^2 + b^2)c^2 + (a^2 + b^2)d^2$$
$$= c^2 + d^2 = 1$$
$$\therefore\ \frac{z_1}{z_2} \in M$$

26. $z = \dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1 + z + z^2 + \cdots + z^{2008}$ 의 값은?

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ i ⑤ 1

해설

$z = \dfrac{1+i}{1-i} = i, z^2 = -1,\ z^3 = -i,\ z^4 = 1$

(준식) : $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

처음 네 항의 합 :

$1 + i - 1 - i = 0$

$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

$= 0 + 0 + \cdots + 0 + z^{2008}$

$= z^{2008}$

$= (z^4)^{502}$

$= 1$

27. x 에 대한 이차방정식 $x^2+4kx+5k^2-1=0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, α 의 최댓값과 β 의 최솟값의 합을 구하여라. (단, $\alpha \geq \beta$ 이고, k 는 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 등식 $x^2+4kx+5k^2-1=0 \cdots\cdots$ ㉠ 을 k 에 대하여 정리하면

$5k^2+4xk+\left(x^2-1\right)=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉡은 k 에 대한 이차방정식이고 k 가 실수이므로 실근을 갖는다.

따라서, 판별식 D 에 대하여

$$\frac{D}{4}=(2x)^2-5\left(x^2-1\right) \geq 0$$

$-x^2+5 \geq 0,\ x^2-5 \leq 0$

$\therefore -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \cdots\cdots$ ㉢

그런데 α, β 는 ㉠의 실근이므로 ㉢의 범위 안에 있어야 한다.

$\therefore -\sqrt{5} \leq \beta \leq \alpha \leq \sqrt{5}$

α 의 최댓값은 $\sqrt{5}$, β 의 최솟값은 $-\sqrt{5}$

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 0

28. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x + 5y < 5 \\ -2 < 2x + 7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진 순서쌍 $(x,\ y)$ 중 $x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$ 이라 할 때, $M + 2m$ 의 값을 구하면?

① -9 ② -13 ③ -18 ④ -22 ⑤ -26

해설

$1 < x + 5y < 5 \cdots\cdots$ ㉠

$-2 < 2x + 7y < 3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times (-2) +$ ㉡을 하면

$-10 < -2x - 10y < -2 \cdots\cdots$ ㉢

$-2 < 2x + 7y < 3 \cdots\cdots$ ㉣

㉢ + ㉣ $= -12 < -3 < 1$

그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$

그런데, y는 정수이므로 $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

이것을 ㉠, ㉡에 대입하여 적합한 x의 값을 구하면

$(x,\ y) = (-3,\ 1),\ (-6,\ 2),\ (-7,\ 2),\ (-11,\ 3)$

따라서, $x + y$ 의 최댓값은 $-3 + 1 = -2$ 이고,

최솟값은 $-11 + 3 = -8$ 이다.

$\therefore M = -2,\ m = -8 \ \therefore\ M + 2m = -18$

29. 두 부등식 $-x^2+4x+5<0$,
$x^2+ax-b\leq 0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $5<x\leq 6$일 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② 1 ③ -11 ④ 11 ⑤ 5

해설

$x^2-4x-5>0$

$(x+1)(x-5)>0$

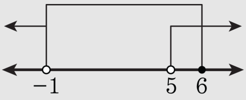
$x<-1$ 또는 $x>5$

$x^2+ax-b\leq 0$

$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$ 라 하자

$\alpha\leq x\leq\beta$

이제 주어진 조건에 만족하려면



$\therefore \alpha=-1, \beta=6$

$\Rightarrow (x+1)(x-6)=x^2-5x-6$

$a=-5, b=6, a+b=1$

30. 두 점 A $(-3,\ 4)$, B $(2,\ 6)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점 Q의 좌표는?

① $P\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $Q\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
② $P\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $Q\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
③ $P\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$, $Q\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$
④ $P\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $Q\left(0,\ \frac{7}{4}\right)$
⑤ $P\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $Q\left(0,\ \frac{15}{2}\right)$

해설

P의 좌표를 P $(a,\ 0)$라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$\sqrt{(a+3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (-6)^2}$

Q의 좌표를 Q $(0,\ b)$라 하면

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서

$\sqrt{3^2 + (b-4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (b-6)^2}$

두 식을 제곱하여 정리하면 $a = \frac{3}{2},\ b = \frac{15}{4}$

$\therefore P\left(\frac{3}{2},\ 0\right),\ Q\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$

31. 세 꼭짓점이 A$(-1,\ -1)$, B$(4,\ 3)$, C$(0,\ 1)$인 $\triangle$ABC 에서 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$를 $2:3$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\triangle$DEF 의 무게중심을 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle$ABC 에서 각 변을 $m:n$ 으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle$ABC 의 무게중심과 일치한다.
$\triangle$ABC 의 무게중심은

$$\left(\frac{-1+4+0}{3},\ \frac{-1+3+1}{3}\right),$$

즉 $(1,\ 1)$ 이므로 $\triangle$DEF 의 무게중심은 $(1,\ 1)$ 이다.
$\therefore\ a+b=1+1=2$

32. 원 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 에 외접하고, 동시에 점 $(-2,\ 0)$ 에서 x 축에 접하는 원의 둘레의 길이는?

① $\dfrac{14}{3}\pi$　② 5π　③ $\dfrac{16}{3}\pi$　④ $\dfrac{7}{2}\pi$　⑤ $\dfrac{15}{4}\pi$

해설

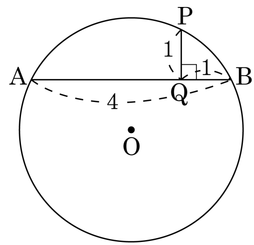
x 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
$(-2,\ 0)$ 을 지나므로
$(-2-a)^2+b^2=b^2 \ \Rightarrow\ a=-2$
$(x+2)^2+(y-b)^2=b^2$
$(x-1)^2+(y-4)^2=4$ 에 외접하므로 중심 사이의
거리는 반지름의 길이 합과 같다.

$$\Rightarrow\ \sqrt{(1+2)^2+(4-b)^2}=b+2$$

$$\Rightarrow\ b=\frac{7}{4}$$

$$\therefore 2\cdot\pi\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{2}\pi$$

33. 다음 그림과 같이 한 원 O 의 호와 현으로 이루어진 도형에서 $\overline{\mathrm{AB}}=4, \overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}=1$ 일 때, 원 O 의 반지름의 길이의 제곱을 구하여라.

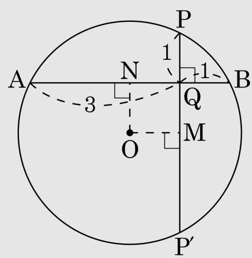


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

그림과 같이 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 연장선과 원 O 의 교점을 P′ 이라 하면



$\overline{\mathrm{P'Q}}=3$ $(\because \overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{P'Q}}=\overline{\mathrm{AQ}}\cdot\overline{\mathrm{BQ}})$

또, 원 O 의 중심에서 $\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{PP'}}$ 에 내린 수선의 발을 각각 N, M 이라 하면

원의 중심에서 현에 그은 수선은 현을 수직이등분하므로

$\overline{\mathrm{NB}}=\overline{\mathrm{PM}}=2$

따라서 $\overline{\mathrm{NQ}}=\overline{\mathrm{QM}}=1$ 이 되므로

□OMQN 은 정사각형이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{OM}}=1,\ \overline{\mathrm{PM}}=2$

그러므로 피타고라스의 정리에 의하여

$r=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$r^2=5$

34. 점 P 를 x축에 대해 대칭이동하고, x축 방향으로 -2만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동한 후, 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하였더니 점 P와 일치하였다. 점 P의 좌표를 (x, y)라 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\mathrm{P}(a, b)$를 x축에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (a, -b)$,

x축으로 -2만큼, y축으로 3만큼 평행이동

$\Rightarrow (a-2, -b+3)$

$y=-x$ 에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (b-3, -a+2)$

다시 점P와 일치하므로

$b-3=a, -a+2=b$ 에서

$a-b=-3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$a+b=\ \ 2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면, $a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

35. 원 $x^2+y^2+4x-2y=0$과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭일 때, ab의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$와 다른 한 원은 서로 대칭이므로 크기가 같다.
따라서 다른 원의 방정식은 $x^2+y^2=5$이다.
원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 $x^2+y^2=5$ 이 직선 $y=ax+b$ $\cdots$ ①에 대하여 대칭이므로
직선 ①은 점 $(-2,1)$ 와 점 $(0,0)$을 수직이등분한다.
따라서 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$은 직선 ①위에 있고 기울기의 곱은 -1이다.

$\frac{1}{2}=-a+b$, $\frac{1}{-2}\times a=-1$

$\therefore\ a=2, b=\frac{5}{2}$

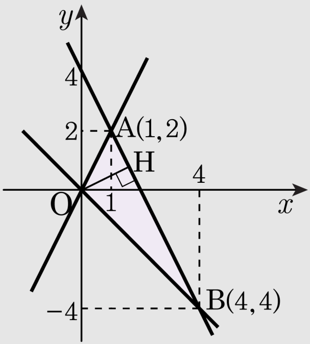
따라서 $a\times b=2\times\frac{5}{2}=5$

36. 세 부등식 $x+y \geq 0$, $2x-y \geq 0$, $2x+y-4 \leq 0$ 을 동시에 만족시키는 영역의 넓이는?

① $\frac{11}{2}$　② 6　③ $\frac{13}{2}$　④ 7　⑤ $\frac{15}{2}$

해설

세 부등식을 모두 만족하는 영역은 빗금 친 부분과 같고 교점을 구하면,



$O(0,\ 0)$, $A(1,\ 2)$, $B(4,\ -4)$

$\triangle OAB$ 에서

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2+(-4-2)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore\ \overline{OH} = \frac{|-4|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ (\triangle OAB \text{ 의 넓이}) = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = 6$$

37. 영희가 A 과자 한 개를 만드는 데 설탕 $1\,\mathrm{g}$, 밀가루 $3\,\mathrm{g}$ 이 필요하고, B 과자 한 개를 만드는 데 설탕 $2\,\mathrm{g}$, 밀가루 $2\,\mathrm{g}$ 이 필요하다고 한다. 영희가 설탕 $80\,\mathrm{g}$ 과 밀가루 $120\,\mathrm{g}$ 을 가지고 최대로 만들 수 있는 A 과자와 B 과자의 총 개수는?

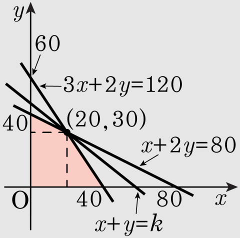
① 40 개 ② 45 개 ③ 50 개 ④ 55 개 ⑤ 60 개

해설

A 과자를 x 개, B 과자를 y 개 만든다고 하면, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+2y \leq 80$, $3x+2y \leq 120$ 이다.

	설탕	밀가루	개수
A과자	1 g	3 g	x개
B과자	2 g	2 g	y개
제한량	80 g	120 g	

이 연립부등식의 영역을 그림으로 나타내면 다음 그림의 어두운 부분이다. 과자의 총 개수를 k 라 하면, $x+y=k$



k 의 값이 최대가 되는 경우는 직선 $x+y=k$ 가 두 직선 $x+2y=80$, $3x+2y=120$ 의 교점 $(20,\ 30)$ 을 지날 때이다.

따라서 만들 수 있는 과자 개수의 최댓값은

$20+30=50$

38. 모든 x에 대하여 $f(x+1)-f(x-1)=6x^2+6,\ \ f(0)=1$을 만족시키는 다항식 $f(x)$가 있다. 다음은 자연수 n에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n + n\alpha x^{n-1} + \cdots + \alpha^n$을 이용하여, $f(x)$를 구하는 과정이다.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$(단, $a_n \neq 0$)라고 놓으면
$f(x+1)-f(x-1)$
$= a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\} + a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\} + \cdots +$
$a_1\{(x+1)-(x-1)\}$
$= \boxed{}\,x^{n-1} + \cdots = 6x^2+6$
에서 $n=3,\ a_n=1$
$\therefore\ f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1$
$f(x+1)-f(x-1) = 6x^2 + 4a_2x + 2 + 2a_1$
이므로 $a_2=0,\ a_1=2$ 즉, $f(x)=x^3+2x+1$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{}$에 알맞은 것은?

① a_n　② $2a_n$　③ na_n　④ $2na_n$　⑤ $3na_n$

해설

$f(x+1)-f(x-1)$
$= a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\}+a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}\cdots$
$= a_n\{(x^n+nx^{n-1}+\cdots)-(x^n-nx^{n-1}+\cdots)\}+a_{n-1}\{(x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots)-(x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}+\cdots)\}+\cdots$
$= a_n(2nx^{n-1}+\cdots)+a_{n-1}\{2(n-1)x^{n-2}+\cdots\}+\cdots$
$= 2na_nx^{n-1}+\{(n-2)$차 이하의 다항식$\}$
$\therefore\ 2na_nx^{n-1}=6x^2$ 에서
$n-1=2,\ 2na_n=6$
$\therefore\ n=3,\ a_n=1$

39. 세 변의 길이가 x, y, z인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$
$\therefore$ $x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because$ $x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 x, y, z는 $x+y\neq z$)

40. 두 다항식 $x^2+ax+bc$ 와 $x^2+bx+ca$가 일차의 최대공약수를 가질 때, 최소공배수를 구하면?

① $(x-a)(x-b)(x-c)$ ② $(a-x)(b-x)(c-x)$

③ $(x-a)^2(x-b)(x-c)$ ④ $(x-a)(x-b)^2(x-c)$

⑤ $(x-a)(x-b)(x-c)^2$

해설

일차의 최대공약수를 $x-p$라 하면

$p^2+ap+bc=0\cdots$㉠

$p^2+bp+ca=0\cdots$㉡

㉠−㉡에서 $(a-b)p-c(a-b)=(a-b)(p-c)=0$

일차의 최대공약수를 가지므로

$a\neq b,\ p=c$이고 최대공약수는 $x-c$

상수항을 기준으로 인수분해하면 각각

$x^2+ax+bc=(x-c)(x-b)$

$x^2+bx+ca=(x-c)(x-a)$

$\therefore$ 최소공배수는 $(x-a)(x-b)(x-c)$

41. x에 대한 이차방정식 $2x^2-2(1-a-b)x+\{1+(a+b)^2\}=0$의 근이 실수일 때, $a^3+b^3-3ab+4$의 값을 구하면? (단, a, b는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-2\left\{1+(a+b)^2\right\}$$

$$=1-2(a+b)+(a+b)^2-2-2(a+b)^2\geq 0$$

$\therefore\ (a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$

즉, $(a+b+1)^2\leq 0$이고 $a,\ b$는 실수이므로

$a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$\therefore\ a^3+b^3-3ab+4$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab+4$

$=(-1)^3-3ab(-1)-3ab+4$

$=3$

42. $m > 0$이고 이차방정식 $mx^2 + (3m-5)x - 24 = 0$의 두 근의 절대값의 비가 $3:2$일 때, 정수가 아닌 m의 값은?

① $\dfrac{25}{9}$ ② $\dfrac{26}{9}$ ③ $\dfrac{28}{9}$ ④ $\dfrac{29}{9}$ ⑤ $\dfrac{31}{9}$

해설

$m > 0$에서 두 근의 곱이 $-\dfrac{24}{m} < 0$이므로

서로 다른 부호의 두 실근을 갖는다.

따라서, 방정식의 두 근을 $3\alpha,\ -2\alpha$라 놓을 수 있다.

근과 계수와의 관계로부터

$$\begin{cases} 3a + (-2\alpha) = -\dfrac{3m-5}{m} \\ 3\alpha(-2\alpha) = -\dfrac{24}{m} \end{cases}$$

$$\therefore \left(-\frac{3m-5}{m}\right)^2 = \frac{4}{m} \qquad \therefore (3m-5)^2 = 4m$$

정리하여 인수분해하면 $(9m-25)(m-1) = 0$

$$\therefore m = \frac{25}{9},\ 1$$

따라서 정수가 아닌 m의 값은 $\dfrac{25}{9}$이다.

43. p와 q가 소수이고, $x^2-px+q=0$이 서로 다른 두 개의 양의 정수근을 가질 때, 다음 중 옳은 문장은 몇 개인가?

(가) 두 근의 차는 홀수이다.
(나) 적어도 한 근은 소수이다.
(다) p^2-q는 소수이다.
(라) $p+q$는 소수이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 0개

해설

$x^2-px+q=0$의 서로 다른 양의 정수근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=p$ ⋯⋯㉠
$\alpha\beta=q$ ⋯⋯㉡이다.
그런데, q가 소수이므로 ㉡에서 두 근은 1과 q이다.
∴ ㉠에서 $1+q=p$ ∴ $p-q=1$
그런데 p도 소수이므로 두 소수의 차가 1인 경우는 $p=3, q=2$일 때 뿐이다.
$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$
∴ $x=1, 2$
따라서, 주어진 문장은 모두 옳다.

44. 실수를 계수로 갖는 이차방정식 $x^2-(m-1)x+(m+1)=0$이 허근 α를 갖고, α^3이 실수일 때, m의 값은?

① 0　　② 1　　③ 3

④ 0, 3　　⑤ 0, 1, 3

해설

α^3이 실수이므로 $\overline{\alpha}^3=\alpha^3$,

$(\alpha-\overline{\alpha})(\alpha^2+\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2)=0$

α는 허수이므로 $\alpha\neq\overline{\alpha}$

$\therefore\ \alpha^2+\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2=0\ \cdots\cdots(\text{i})$

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\overline{\alpha}=m-1,\ \alpha\overline{\alpha}=m+1$

(i)은 $(\alpha+\overline{\alpha})^2-\alpha\overline{\alpha}=0,\ (m-1)^2-(m+1)=0$

$m^2-3m=m(m-3)=0$

$\therefore\ m=0,\ 3$

이차방정식 $x^2-(m-1)x+(m+1)=0$이

허근을 가지므로 $D=(m-1)^2-4(m+1)<0$

$m=0,\ 3$은 이 부등식을 만족시키므로 구하는 답이 된다.

45. 직선 $y=-2x+2$에 접하는 이차함수 $y=x^2+ax+b$가 x축에 의해서 잘려진 선분의 길이가 2일 때, $a+b$의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

해설

포물선과 직선의 교점의 x좌표를 구하는 식은

$x^2+ax+b=-2x+2$ $x^2+(a+2)x+b-2=0$

두 그래프가 접하므로 이 방정식을 중근을 갖는다.

$\mathrm{D}=(a+2)^2-4(b-2)=0$

$\therefore\ b=\frac{1}{4}(a^2+4a+12)\quad\cdots$ ㉠

포물선과 x축과의 교점의 x좌표를 구하는 식은

$x^2+ax+b=0$이 방정식의 두 근을 α,β라 하면

$|\alpha-\beta|=2$이므로 $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=4$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2-4b=4\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2-(a^2+4a+12)=4$

$\therefore\ a=-4,\ b=3\quad\therefore\ a+b=-1$

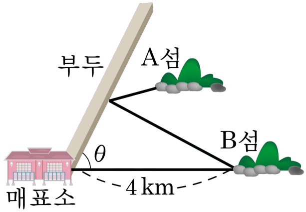
46. 서로 다른 세 실수 a, b, c가 $a^3 - 6a = b^3 - 6b = c^3 - 6c = -1$을 만족시킬 때, $a^3 + b^3 + c^3$의 값은?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ -3 ⑤ 6

해설

$a^3 - 6a = -1,\ b^3 - 6b = -1,\ c^3 - 6c = -1$이므로
$a,\ b,\ c$는 삼차방정식 $x^3 - 6x = -1$
즉, $x^3 - 6x + 1 = 0$의 세 근이다.
따라서, 근과 계수와의 관계에서 $a + b + c = 0,\ ab + bc + ca = 6,\ abc = -1$
$\therefore\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
에서 $a + b + c = 0$이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3 \cdot (-1) = -3$

47. 다음 그림과 같이 매표소를 기준으로 동쪽으로 4 km 지점에 B 섬이 있고, 동쪽으로 2 km , 북쪽으로 2 km 떨어진 지점에 A 섬이 위치하고 있다. 또, B 섬과 부두가 이루는 각이 θ 이다. A 섬 - 부두 -B 섬을 연결하는 연륙교를 만들려고 할 때, 다리의 최소 길이를 구하면? (단, $\tan\theta = 2$)



① $\dfrac{\sqrt{130}}{5}$　② $\dfrac{2\sqrt{130}}{5}$　③ $\dfrac{3\sqrt{130}}{5}$

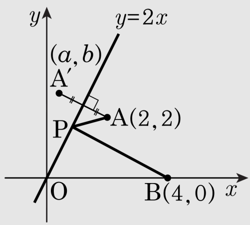
④ $\dfrac{4\sqrt{130}}{5}$　⑤ $\sqrt{130}$

해설

그림과 같이 매표소를 원점 O 라 하자.

$\tan\theta = 2$ 이므로 부두는 $y = 2x$ 인 직선이다.

A 의 $y = 2x$ 에 관한 대칭점을 $\mathrm{A}'(a,\ b)$ 라 하면,



ⅰ) 직선 AA′ 와 $y = 2x$ 는 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-2} = -\frac{1}{2}$$

ⅱ) $\overline{\mathrm{AA'}}$ 의 중점 $\left(\dfrac{2+a}{2}, \dfrac{2+b}{2}\right)$ 는 $y = 2x$ 위의 점이므로,

$$\frac{2+b}{2} = 2\cdot\frac{2+a}{2}$$ 에서 $b = 2a + 2$

ⅰ), ⅱ)를 연립하면, $a = \dfrac{2}{5}$, $b = \dfrac{14}{5}$

$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{PB}}$ 인데

최소이기 위해서는 A′ , P, B 가 일직선 위에 있을 때이므로,

최솟값은

$$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{\left(4-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(0-\frac{14}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{130}}{5}$$

48. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $ax^2+2ax+1-|b|\geq 0$ 을 만족하는 점 $(a,\ b)$ 가 존재하는 영역의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

모든 실수 x 에 대하여 부등식

$ax^2+2ax+1-|b|\geq 0$ 이 성립하려면,

다음 ⅰ), ⅱ) 중 하나가 성립해야 한다.

ⅰ) $a>0$ 일 때,

$D/4\leq 0$

$a^2-a(1-|b|)\leq 0,\ a(a-1+|b|)\leq 0$

$\therefore\ a-1+|b|\leq 0$

경계를 구하면,

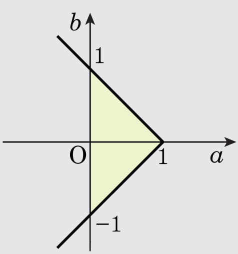
$a-1+|b|=0,\ \ |b|=-a+1$

ⅰ) $a=0$ 일 때,

$1-|b|\geq 0,\ \ |b|\leq 1$

$\therefore\ \ -1\leq b\leq 1$

따라서 구하는 영역은 아래 그림과 같다.



ⅰ), ⅱ)에 의해서 구하는 영역의 넓이는

삼각형의 넓이이고,

$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=1$

49. p, q 가 실수일 때, x 에 대한 이차방정식 $(x-1)(x-2)=k(x-p^2-q^2)$ 이 모든 실수 k 에 대하여 실근을 가지도록 하는 점 $(p,\ q)$ 가 나타내는 영역의 넓이를 구하면?

① π　　② 2π　　③ 3π　　④ 4π　　⑤ 5π

해설

주어진 이차방정식을 정리하면,

$x^2-(k+3)x+k(p^2+q^2)+2=0$

$\therefore\ D=(k+3)^2-4k(p^2+q^2)-8\geq 0$

$k^2+2\left\{3-2(p^2+q^2)\right\}k+1\geq 0$ 이 모든 실수 k 에 대하여 성립하므로,

$D/4=\left\{3-2(p^2+q^2)\right\}^2-1\leq 0$

$\therefore\ 1\leq p^2+q^2\leq 2$

따라서 구하는 넓이는 $2\pi-\pi=\pi$

50. 어느 제약 회사의 두 약품 A, B 의 1 g 당 P 성분, Q 성분의 함유량과 A, B 의 가격은 다음 표와 같다. 어떤 병의 치료에 꼭 필요한 섭취량이 P 성분은 16 mg 이상, Q 성분은 11 mg 이상이라고 할 때, 치료를 위해 드는 최소비용을 구하여라.

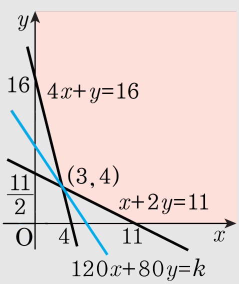
	P(mg)	Q(mg)	가격(원)
A	4	1	120
B	1	2	80

▶ 답 : ______ 원

▷ 정답 : 680 원

해설

섭취할 약품 A, B 의 양을 각각 x mg, y mg 이라고 하면
P 성분의 섭취량은
$(4x+y)$ mg,
Q 성분의 섭취량은
$(x+2y)$ mg 이므로
x, y 는 다음 부등식을 만족한다.
$x \geq 0,\ y \geq 0,\ 4x+y \geq 16,\ x+2y \geq 11$



이 부등식을 만족하는 영역은 다음 그림과 같다. 이 때, 치료를 위해 드는 비용은 $(120x+80y)$ 원 이므로
$120x+80y=k$ 로 놓으면
$y=-\frac{3}{2}x+\frac{k}{80}$
이것은 기울기가 $-\frac{3}{2}$,
y 절편이 $\frac{k}{80}$ 인 직선이므로
두직선 $4x+y=16$, $x+2y=11$ 의 교점 $(3, 4)$ 를 지날 때 k 는 최소가 된다.
따라서, 구하는 최소 비용은
$120 \cdot 3+80 \cdot 4=680$(원)