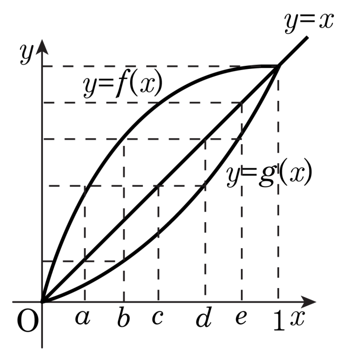
1. 집합 $A = \{x|0 \le x \le 1\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $(f \circ g \circ f^{-}1)(d)$의 값은 얼마인가?

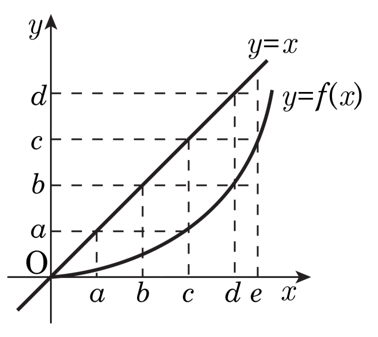


① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$y = x$를 이용하여 함숫값을 구한다.
$f^{-1}(d) = x$라 하면,
$f(x) = d \qquad \therefore x = b$
$\therefore (f \circ g \circ f^{-1})(d)$
$= (f \circ g)(f^{-1}(d))$
$= (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = c$

2. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $(f \circ f)^{-1}(a)$ 의 값은 얼마인가?

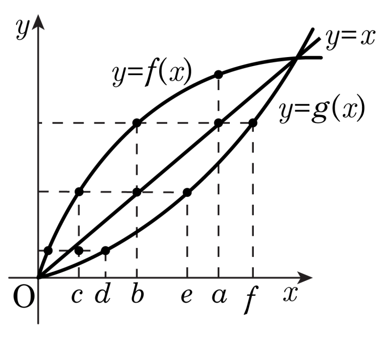


① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f \circ f)^{-1}(a) = (f^{-1} \circ f^{-1})(a)$
$= f^{-1}(f^{-1}(a)) \cdots$ ㉠
$f^{-1}(a) = m$ 으로 놓으면 $f(m) = a$ 이고,
그래프에서 $f(c) = a$ 이므로 $m = c$
$\therefore f^{-1}(a) = c$
이 때, ㉠에서
$(f \circ f)^{1}(a) = f^{-1}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(c) \cdots$ ㉡
또, $f^{-1}(c) = n$ 으로 놓으면 $f(n) = c$ 이고
그래프에서 $f(e) = c$ 이므로 $n = e$
$\therefore f^{-1}(c) = e$
따라서, ㉡에서
$(f \circ f)^{-1}(a) = f^{-1}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(c) = e$

3. 다음 그림은 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=x$의 그래프이다. 이때, $(f\circ f\circ g)^{-1}(a)$의 값은?



① a　　② b　　③ c　　④ d　　⑤ e

해설

$(f\circ f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1}\cdots\cdots$㉠이고

$f^{-1}(a)=k$라 하면 $f(k)=a$에서 $k=b$

$\therefore\ f^{-1}(a)=b\cdots\cdots$㉡

$f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$에서 $l=c$

$\therefore\ f^{-1}(b)=c\cdots\cdots$㉢

$g^{-1}(c)=m$이라 하면 $g(m)=c$에서 $m=d$

$\therefore\ g^{-1}(c)=d\cdots\cdots$㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ g)^{-1}&=(g^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(a)\\&=g^{-1}[f^{-1}\{f^{-1}(a)]\\&=g^{-1}\{f^{-1}(b)\}=g^{-1}(c)=d\end{aligned}$$

4. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 $f,\ g,\ h$ 에 대하여 $(h\circ g)(x) = 3x+4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h\circ(g\circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h\circ(g\circ f))(2) &= ((h\circ g)\circ f)(2)\\ &= (h\circ g)(f(2))\\ &= (h\circ g)(4)\\ &= 3\times 4+4 = 16\end{aligned}$$

5. 두 함수 $f(x)=x+2$, $g(x)=2x-1$ 에 대하여 $(g\circ f)(1)$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(3)=5$

6. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $(g \circ f)(2)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\therefore\ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$

7. 함수 $f(x) = ax - 1$ 과 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 같도록 상수 a 의 값을 정하면?

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 5

해설

$y = f(x)$ 라 하면 $y = ax - 1$

이것을 x 에 대하여 정리하면 $ax = y + 1$

$\therefore\ f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$

그런데 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이고 모든 실수에 대하여 성립해야 하므로

$\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} = ax - 1$

$\therefore\ \frac{1}{a} = a$ 이고 $\frac{1}{a} = -1$ 이어야 하므로

$\therefore\ a = -1$

8. 함수 $y = x^2 - 2x\ (x \geq 1\ )$ 의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 2x\ (x \geq 1)$

② $y = x^2 - 2x\ (x \leq 1)$

③ $y = \sqrt{x+1}\ (x \geq -1)$

④ $y = \sqrt{x+1} + 1\ (x \geq -1)$

⑤ $y = \sqrt{-x+1} + 1\ (x \leq 1)$

해설

$y = x^2 - 2x$ 에서 $x^2 - 2x + 1 = y + 1$

$(x-1)^2 = y + 1,\ x - 1 = \sqrt{y+1}\ (\because x \geq 1)$

$\therefore x = \sqrt{y+1} + 1$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \sqrt{x+1} + 1$

이 때, 원래의 함수

$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1\ (x \geq 1\ )$ 의 치역

$\{y | y \geq -1\}$ 이

역함수 $y = \sqrt{x+1} + 1$ 의 정의역이 되므로

구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+1} + 1\ (x \geq -1)$

9. 두 함수 $f(x) = x+2$, $g(x) = 2x-3$일 때, 합성함수 $g \circ f$의 역함수 $(g \circ f)^{-1}(x)$를 구하면 무엇인가?

① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$　② $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　③ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　⑤ $y = \frac{1}{2}x + 1$

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x+2)\\ &= 2(x+2) - 3 = 2x + 1\end{aligned}$$

합성함수 $g \circ f$는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.
$y = 2x + 1$로 놓고 x에 대하여 풀면
$x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$ 이 된다.
따라서, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 이다.

10. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응인 세 함수 $f,\ g,\ h$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

㉠ $f \circ g = g \circ f$

㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$

㉣ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉣　　③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ 일반적으로 함수의 합성에서
교환법칙은 성립하지 않는다.
∴ 옳지 않다.

㉡ 함수의합성에서 결합법칙은 성립한다.
∴ 옳다.

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1}$
$= ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}$
$= h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$
∴ 옳지 않다.

㉣ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로
$f \circ g = I$ 에서$f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$
∴ $g = f^{-1}$　∴ 옳다.

11. 다음 중 일반적으로 성립하는 성질이 아닌 것은 무엇인가?

① $g \circ f = f \circ g$ ② $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

③ $(f^{-1})^{-1} = f$ ④ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

⑤ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

해설

합성함수의 성질에서
교환법칙은 성립하지 않는다.

12. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.

㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.

㉢ 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면
$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

④ ㉡,㉢　　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$
㉢. $f : X \to Y, f^{-1} : Y \to X$ 이므로,
$f \circ f^{-1} : Y \to Y, f^{-1} \circ f : X \to X$
그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.
$\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$
따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.