1. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는
$(a-b+16)x+4b-8$
$(a-b+16)x+4b-8=3x+4 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 x에 대한 항등식이므로,
$a-b+16=3,\ 4b-8=4$
$\therefore\ a=-10,\ b=3$
$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

2. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$

$$=a+1=2000$$

3. 다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (\boxed{}x^2 + \boxed{}x + \boxed{}) = x + 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : −1

해설

$\boxed{}x^2 + \boxed{}x + \boxed{} = A$ 라 하면

$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div A = x + 2$

$\therefore\ A = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$

$\therefore\ A = x^2 + 2x - 1$ 이므로

$\boxed{}$ 안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, −1 이다.

4. $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$
④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$$
\begin{aligned}
P &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{1}6+1) \\
&= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= \quad \vdots \\
&= (2^{16}-1)(2^{16}+1) \\
&= 2^{32}-1
\end{aligned}
$$

5. x^5+x+1을 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^5+x+1=(x+1)Q(x)+R$

$x=-1$을 양변에 대입하면 $R=-1$

$\therefore\ x^5+x+1=(x+1)Q(x)-1\cdots$ ㉠

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $Q(1)$

㉠에 $x=1$을 대입하면 $3=2Q(1)-1$

$\therefore\ Q(1)=2$

6. 1985년부터 1995년까지 5년 간격으로 조사한 우리나라의 농가인구 비율 P는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

연도	85	90	95
인구비율(%)	20.9	15.5	10.8
인구(1000명)	8521	6661	4851

$P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

이 때, $t = 0$은 1985년을 나타낸다. 이 식을 $t = 0$이 1990년을 나타내도록 변형하면?

① $P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

② $P = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$

③ $P = 0.35(t-1)^2 - 5.75(t-1) + 20.9$

④ $P = 0.35(t+2)^2 - 5.75(t+2) + 20.9$

⑤ $P = 0.35(t-2)^2 - 5.75(t-2) + 20.9$

해설

$P_1(t) = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$일 때,
$t = 0 \rightarrow 1985$년, $t = 1 \rightarrow 1990$년, $t = 2 \rightarrow 1995$년
$P_2(t) = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$이면,
$P_2(0) = P_1(1)$이므로 $P_2(t)$에서
$t = 0 \rightarrow 1990$년임을 알 수 있다.

7. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면 $Q(x)$ 의 계수의 총합 (상수항 포함) 과 R 과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29}+1)$　② $\frac{1}{2}\cdot 3^{30}$　③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$　⑤ $\frac{1}{2}(3^{29}-1)$

해설

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R$

$x=3$ 을 대입하면 $3^{30}=R$

$Q(x)$ 의 계수의 총합은 $Q(1)$ 과 같으므로

$x=1$ 을 대입하면 $1=-2Q(1)+3^{30}$

$\therefore\ Q(1)=\dfrac{3^{30}-1}{2}$

$\therefore\ R-Q(1)=3^{30}-\dfrac{3^{30}-1}{2}=\dfrac{3^{30}+1}{2}=\dfrac{1}{2}(3^{30}+1)$

8. $a^2 - b^2 = 1$일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$의 값은? (단, n은 자연수)

① 2　　② $2(a+b)^n$　　③ 4

④ $4(a+b)^n$　　⑤ $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2 - (B)^2$ 형태이므로
합차공식을 사용하여 정리하면
(준식)$= 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2-b^2)^n = 4$

9. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{-a-b+c}{a-b-c}$일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

$\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{-a-b+c}{a-b-c}$에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

(좌변)

$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$=(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2$

$=a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

따라서, $2a^2+2b^2-2c^2=0$이므로 $a^2+b^2=c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

10. $a-b=2-\sqrt{3}$, $b-c=2+\sqrt{3}$인 세 수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$의 값은?

① 4　　② 3　　③ 1　　④ −2　　⑤ −3

해설

$a-b=2-\sqrt{3}\ \cdots\cdots$ ㉠
$b-c=2+\sqrt{3}\ \cdots\cdots$ ㉡
㉠+㉡을 계산하면 $a-c=4$
$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$
$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-c^2b$
$=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\cdot 4=4$