

단원 종합 평가

1. 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$$\{1, 2, 3\} \cup X = \{1, 2, 3\}$$

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 정답: 8 개

해설

$\{1, 2, 3\} \cup X = \{1, 2, 3\}$ 은 $X \subset \{1, 2, 3\}$ 이므로 가능한 X 의 개수는 $\{1, 2, 3\}$ 의 부분집합의 개수이다.

$$\therefore 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ (개)}$$

2. 100 이하의 자연수 중에서 3 의 배수이거나 4 의 배수인 수의 개수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 정답: 50 개

해설

3 의 배수인 집합을 A 라 하고, 4 의 배수인 집합을 B 라 하자.

3 의 배수이면서 4 의 배수인 집합은 $A \cap B$ 이다.

3 의 배수이거나 4 의 배수인 수, 즉 $A \cup B$ 를 구하는 것이다.

$$n(A) = 33, n(B) = 25, n(A \cap B) = 8 \text{ 이므로}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$x = 33 + 25 - 8$$

$$x = 50$$

3. 다음 보기 중 집합인 것은 모두 몇 개인가?

보기

- ㉠ 4 보다 작은 자연수의 모임
- ㉡ 피아노를 잘 치는 사람의 모임
- ㉢ 1 보다 크고 2 보다 작은 자연수의 모임
- ㉣ 7 의 배수의 모임
- ㉤ 수 30341 에 나타나 있는 숫자의 모임

[배점 4, 중중]

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개

- ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

- ㉡ ‘잘치는’ 이란 기준이 명확하지 않아 집합이 아니다.

4. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{보다 작은 홀수}\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1 또는 5 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 12 개

해설

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

원소 1 을 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{4-1} = 8 \text{ (개)}$$

원소 5 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{4-1} = 8 \text{ (개)}$$

원소 1, 5 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{4-2} = 4 \text{ (개)}$$

원소 1 또는 5 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$8 + 8 - 4 = 12 \text{ (개)}$$

5. 경진이가 사는 아파트에는 중학생이 모두 30명 있다. 토요일에는 아파트로 찾아오는 이동 도서관을 이용하는데, 이동 도서관에는 가, 나 두 코너가 마련되어 있다. 토요일에 가 코너를 이용하는 학생은 18명, 나 코너를 이용하는 학생은 10명, 두 코너를 모두 이용하는 학생은 7명이라고 한다. 토요일에 이동 도서관을 이용하지 않는 학생 수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9명

해설

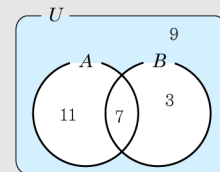
아파트에 사는 중학생을 전체집합 U , 토요일에 이동 도서관의 가 코너를 이용하는 학생의 집합을 A , 나 코너를 이용하는 학생의 집합을 B 라 하면

$$\begin{aligned} n(U) &= 30, n(A) = 18, n(B) = 10, n(A \cap B) = 7 \\ n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 18 + 10 - 7 \\ &= 21 \end{aligned}$$

따라서 토요일에 이동 도서관을 이용하지 않는 학생 수는

$$n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 30 - 21 = 9 \text{ (명)}$$

벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 토요일에 이동 도서관을 이용하지 않는 학생 수는 9명이다.

6. 집합 $A = \left\{ x \mid x = \frac{30}{n}, x \text{와 } n \text{은 모두 자연수} \right\}$ 일 때, $n(A)$ 를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

x 가 자연수가 되려면 n 은 30 의 약수가 되어야 한다.

$$n = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 \text{ 일 때,}$$

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$\therefore n(A) = 8$$

7. 다음 중 무한집합인 것을 모두 고르면? (정답 2개)
[배점 5, 중상]

- ① $A = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 100\}$
 ② $B = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{보다 작은 분수}\}$
 ③ $C = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수인 짝수}\}$
 ④ $D = \{x \mid x \text{는 } 2 \times n, n \text{은 } 10 \text{보다 작은 자연수}\}$
 ⑤ $E = \left\{x \mid x \text{는 } \frac{100}{x} \text{을 자연수로 만드는 자연수}\right\}$

해설

- ① $A = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 100\}$ 이므로 유한 집합이다.
 ② $B = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{보다 작은 분수}\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ 이므로 무한집합이다.
 ③ $C = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수인 짝수}\} = \{6, 12, \dots\}$ 이므로 무한집합이다.
 ④ $D = \{x \mid x \text{는 } 2 \times n, n \text{은 } 10 \text{보다 작은 자연수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 18\}$ 이므로 유한집합이다.
 ⑤ $E = \left\{x \mid x \text{는 } \frac{100}{x} \text{을 자연수로 만드는 자연수}\right\} = \{1, 2, 4, 5, 20, 25, 50, 100\}$ 이므로 유한집합이다.

8. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고, 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 갯수를 구하여라.

$$\begin{aligned} B &\subset A \\ 2 &\in B \\ n(B) &= 3 \end{aligned}$$

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 6 개

해설

집합 B 는 원소 2를 반드시 포함하고 원소의 갯수가 3개인 집합 A 의 부분집합이다. 따라서 만족하는 집합 B 를 구하면
 $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}$ 이고, 총 6개이다.

9. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A - B) = 20$, $n(A^c \cap B) = 12$, $n(A \cup B) = 48$ 일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$$\begin{aligned} A^c \cap B &= B - A \\ n(A \cup B) &= n(A - B) + n(A \cap B) + n(A^c \cap B) \\ 48 &= 20 + n(A \cap B) + 12 \\ \therefore n(A \cap B) &= 16 \end{aligned}$$

10. 집합 $S = \{a, \{a\}, \{a, b\}, b, \{c\}, c, d\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것만 골라라.

- ㉠ $\{a\} \subset S$
 ㉡ $\{b\} \in S$
 ㉢ $\{b, c, d\} \in S$
 ㉣ $c \in S, d \in S$
 ㉤ $\{c, d\} \subset S$
 ㉥ $S \subset \{a, b, c, d\}$

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠

▷ 정답: ㉣

▷ 정답: ㉤

해설

집합 S 는 집합 안에 또 다른 집합을 원소로 가진 집합이다. 따라서 집합 S 의 원소는

$\{a, \{a\}, \{a, b\}, b, \{c\}, c, d\}$ 가 된다.

㉠ $\{a\} \subset S \rightarrow \{a\}$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.

㉡ $\{b\} \in S \rightarrow b$ 는 집합 S 의 원소이지만 $\{b\}$ 는 집합 S 의 원소가 아니다.

㉢ $\{b, c, d\} \in S \rightarrow b, c, d$ 는 모두 집합 S 의 원소이므로 $\{b, c, d\} \subset S$ 가 되어야 한다.

㉣ $c \in S, d \in S \rightarrow c, d$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.

㉤ $\{c, d\} \subset S \rightarrow c, d$ 는 집합 S 의 원소이고 $\{c, d\}$ 는 집합 S 의 부분집합이 되므로 옳다.

㉥ $S \subset \{a, b, c, d\} \rightarrow$ 집합 S 는 $\{a, b, c, d\}$ 의 부분집합이 될 수 없다.

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉣, ㉤이다.

11. 두 집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, d\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 를 모두 구해보고 그 개수를 구하여라.

$$B \subset X \subset A, B \neq X$$

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 7개

해설

집합 X 는 $\{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 중 a, d 를 항상 원소로 갖는 집합이고 B 가 아니므로

$\{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, d, e\},$
 $\{a, b, c, d\}, \{a, b, d, e\},$
 $\{a, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}$ 의 7 개이다.

12. 자연수 k 에 대하여 집합 $A_k = \{x | k < x \leq 20k \text{인 자연수}\}$ 일 때, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_{10})$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$$A_1 = \{2, 3, \cdots, 20\}$$

$$A_2 = \{3, 4, \cdots, 40\}$$

$$A_3 = \{4, 5, \cdots, 60\}$$

⋮

$$A_{10} = \{11, 12, 13, \cdots, 200\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{10} = \{11, 12, \cdots, 20\}$$

$$\therefore n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{10}) = 10$$

13. 원소의 개수가 40 개인 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cap B) = k$ 라고 할 때, $n(A) = n(A^c) = 5k$, $n(B - A) = 3k$ 이다. 이 때 $n(A^c \cap B^c)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$n(A) = n(A^c) = 5k \rightarrow n(U) = 40$ 이므로 $10k = 40$, $k = 4$ 이고,
 $n(A) = 20$, $n(B - A) = 12$ 이므로 $n(A \cup B) = 32$
 $\therefore n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 32 = 8$

14. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2m - 1\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m - 1$ 은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개일 때 자연수 m 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2m - 1\} \rightarrow n(A) = m$ (개)
 원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m - 1$ 은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개이므로
 $2^{m-2-2} = 32$, $m - 4 = 5$
 $m = 9$

15. 집합 $A_n = \{x | 2n - 1 \leq x \leq 2n + 1, n \text{은 자연수}\}$ 에 대하여 $n(A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \dots \cup A_{10})$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$A_3 = \{x | 5 \leq x \leq 7\}$,
 $A_4 = \{x | 7 \leq x \leq 9\}$,
 $A_5 = \{x | 9 \leq x \leq 11\}$,
 $\vdots$
 $A_{10} = \{x | 19 \leq x \leq 21\}$,
 $A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \dots \cup A_{10} = \{x | 5 \leq x \leq 21\}$,
 $\therefore n(A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \dots \cup A_{10}) = 17$