

단원 형성 평가

1. $\{2, 3\} \subset X \subset \{0, 1, 2, 3\}$ 을 만족하는 집합 X 의 갯수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 정답: 4개

해설

집합 X 는 $\{0, 1, 2, 3\}$ 의 부분집합 중 원소 2, 3 을 반드시 포함하는 집합이다. 따라서 집합 X 의 갯수는 $2^{4-2} = 2^2 = 4$ (개) 이다.

2. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ 에 대하여 $(A \cap B) \subset X \subset U$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는? [배점 3, 중하]

- ① 1개 ② 2개 ③ 4개
④ 8개 ⑤ 16개

해설

$A \cap B = \{2, 5\}$ 이므로, 집합 X 는 원소 2, 5를 포함하는 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합이다. 따라서 X 의 개수는 U 에서 원소 2, 5 를 빼 $\{1, 3, 4\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (개) 이다.

3. 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 3, 중하]

- ① $\{a, b, c\} \cap \emptyset = \emptyset$
② $\{\text{피, 아, 노}\} \cup \{\text{피, 노, 키, 오}\} = \{\text{피, 아, 노, 키, 오}\}$
③ $\{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\} \cap \{\clubsuit, \star\} = \{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit, \star\}$
④ $\{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\} \cap \{1, 2, 5\} = \{1, 2, 5\}$
⑤ $\{x | x \text{는 } 12 \text{ 의 약수}\} \cap \{x | x \text{는 } 18 \text{ 의 약수}\} = \{x | x \text{는 } 6 \text{ 의 약수}\}$

해설

⑤ $\{x | x \text{는 } \square \text{ 의 약수}\} \cap \{x | x \text{는 } \triangle \text{ 의 약수}\} = \{x | x \text{는 } \bigcirc \text{ 의 약수}\}$ 일 때, $\bigcirc$ 는 $\square, \triangle$ 의 최대 공약수이다.

4. 집합 $A = \{x | x \text{는 } 20 \text{ 미만의 } 3 \text{ 의 배수}\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는? [배점 4, 중중]

- ① 16 ② 32 ③ 56
④ 64 ⑤ 128

해설

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
전체 부분집합의 개수: $2^6 = 64$ (개)
홀수를 적어도 1 개 포함하는 집합의 개수는 전체 부분집합의 개수에서 홀수가 하나도 포함되지 않은 부분집합의 개수를 빼면 된다.
 $2^6 - 2^3 = 64 - 8 = 56$ (개)

5. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 14 \text{ 이하의 } 2 \text{의 배수}\}$ 중 원소 2 또는 4를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 96 개

해설

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

원소 2를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{7-1} = 64 \text{ (개)}$$

원소 4를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{7-1} = 64 \text{ (개)}$$

원소 2, 4를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{7-2} = 32 \text{ (개)}$$

원소 2 또는 4를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$64 + 64 - 32 = 96 \text{ (개)}$$

6. $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{2, 5\}$, $B - A = \{1, 7\}$, $A^c \cap B^c = \{3, 6, 8, 9\}$ 에 대하여 집합 A 는?

[배점 4, 중중]

- ① $\{2, 4\}$ ② $\{4, 5\}$
 ③ $\{2, 4, 5\}$ ④ $\{2, 4, 5, 6\}$
 ⑤ $\{2, 4, 5, 10\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A - B = \{2, 5\}$, $B - A = \{1, 7\}$, $A^c \cap B^c = \{3, 6, 8, 9\}$ 이므로 $A \cap B = \{4, 10\}$ 이다.

따라서 $A = (A - B) \cup (A \cap B) = \{2, 4, 5, 10\}$ 이다.

7. 다음을 만족하는 집합 A 의 원소가 될 수 없는 것은?

- ㉠ 모든 원소는 자연수이다.
 ㉡ $2 \in A, 6 \in A$
 ㉢ $a + b \in A, a \in A, b \in A$

[배점 5, 중상]

- ① 4 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$2 \in A, 6 \in A$ 이므로

$$2 + 2 = 4 \in A, 2 + 6 = 8 \in A$$

$$4 + 6 = 10 \in A, 6 + 6 = 12 \in A$$

8. 집합 $A = \{1, 2\}$ 에 대하여 집합 B 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합일 때, 집합 B 의 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^2 = 4 \text{ (개)} \text{ 이므로 } n(B) = 4 \text{ 이다.}$$

따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는

$$2^{n(B)} = 2^4 = 16 \text{ (개)} \text{ 이다.}$$

9. 집합 $A = \{0, 2, \{4\}, \{6, 8\}, \emptyset\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?. [배점 5, 중상]

- ① $\emptyset \in A$ ② $\{0, 2, \{4\}\} \subset A$
 ③ $n(A) = 5$ ④ $\{4\} \subset A$
 ⑤ $\{6, 8\} \in A$

해설

- ④ $\{4\} \in A$

10. 집합 $A = \{x \mid x < 20, x = 3n + 1 (n \text{은 자연수})\}$ 라고 할 때, 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 56개

해설

$A = \{4, 7, 10, 13, 16, 19\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개) 이고, 이 중에서 홀수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 4, 10, 16 으로 만든 부분집합이므로 $2^3 = 8$ (개) 이다.
 $\therefore 64 - 8 = 56$ (개)

11. 진수네 반에서 동생이 있는 학생은 모두 25 명이다. 이 중에서 남동생이 있는 학생이 18 명, 여동생이 있는 학생이 15 명이었다. 남동생과 여동생이 모두 있는 학생은 몇 명인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 8명

해설

남동생과 여동생이 있는 집합을 각각 A, B 라 하면

$$n(A) = 18, n(B) = 15, n(A \cup B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 18 + 15 - 25 = 8$$

12. 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 작은 순서로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 으로 나타낼 때, $a_2 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하여라.

- 집합 A 의 원소는 항상 1 보다 크거나 같다.
- $a_1 = 1, x \in A$ 이면, $\frac{3}{2} \times x \in A$ 이다.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: $\frac{141}{16}$

해설

$a_1 = 1$ 이면 $a_2 = \frac{3}{2} \times a_1$ 이고 이러한 방식으로
집합 A 를 구하면,

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)} \times a_1\right\},$$

$$a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{9}{4}, a_5 = \frac{81}{16} \text{ 이다.}$$

$$\therefore a_2 + a_3 + a_5 = \frac{141}{16}$$

13. 원소의 개수가 40 개인 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cap B) = k$ 라고 할 때, $n(A) = n(A^c) = 5k$, $n(B - A) = 3k$ 이다. 이 때 $n(A^c \cap B^c)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 8

해설

$$n(A) = n(A^c) = 5k \rightarrow n(U) = 40 \text{ 이므로 } 10k = 40, k = 4 \text{ 이고,}$$

$$n(A) = 20, n(B - A) = 12 \text{ 이므로 } n(A \cup B) = 32$$

$$\therefore n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 32 = 8$$

14. 세 자리의 자연수 중에서 일의 자리 숫자가 4 의 배수인 수의 집합을 A , 십의 자리 숫자가 4 의 배수인 수의 집합을 B , 일의 자리의 숫자가 4 의 배수인 수의 집합을 C 라 할 때, $n(A \cap B \cap C)$ 를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 18

해설

일의 자리 숫자가 4 의 배수인 수의 집합과 십의 자리 숫자가 4 의 배수인 수의 집합, 일의 자리의 숫자가 4 의 배수인 수의 집합의 교집합은 세 자리 모두 4 의 배수인 수로 이루어진 수의 집합이다.
4 의 배수가 될 수 있는 한 자리 수는 0, 4, 8 이지만, 백의 자리에는 0 이 올 수 없다.

$$\therefore n(A \cap B \cap C) = 2 \times 3 \times 3 = 18$$

15. 세 집합 A, B, C 사이에 $A - B = A$, $B - C = B$, $C - A = C$ 이 성립한다. 집합 A, B, C 의 부분집합의 개수의 총합이 44 개일 때, $A \cup B \cup C$ 의 원소의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 10 개

해설

$A - B = A$, $B - C = B$, $C - A = C$ 이면,
 A, B, C 중 임의의 두 집합 사이의 교집합은 모두
공집합이다.

그러므로 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$,
 $n(A) = a$, $n(B) = b$, $n(C) = c$ 라고 할 때 $2^a +$
 $2^b + 2^c = 44$,

3 개의 2 의 거듭제곱수의 합이 44 가 되는 경우는
 $2^2 + 2^3 + 2^5 = 4 + 8 + 32 = 44$ 의 한 가지 경우
뿐이므로 $a + b + c = 10$

따라서 $n(A \cup B \cup C) = 10$