

단원 형성 평가

1. 두 집합

$A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\},$

$B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$

에 대하여 $A \subset B$ 이고 $A \neq B$ 일 때, $\square$ 안에 알맞은 가장 큰 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

A 는 B 의 진부분집합이고,

$A = \{12, 24, 36, \dots\}$ 이므로

$B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 의 $\square$ 에는 12의 약수 중 12를 제외한 수가 들어가야 한다.

따라서 $\square$ 안에 들어갈 수는 1, 2, 3, 4, 6 이고, 가장 큰 자연수는 6 이다.

2. A 중학교 1 학년 6 반 학생은 모두 40 명이다. 수학을 좋아하는 학생은 26 명, 사회를 좋아하는 학생은 18 명, 수학 또는 사회를 좋아하는 학생은 36 명이다. 수학만 좋아하는 학생은 몇 명인가? [배점 3, 중하]

① 6 명 ② 7 명 ③ 10 명

④ 14 명 ⑤ 18 명

해설

전체 학생의 집합을 U , 수학을 좋아하는 학생의 집합을 A , 사회를 좋아하는 학생들의 집합을 B 라 하자.

$n(U) = 40, n(A) = 26, n(B) = 18, n(A \cup B) = 36$ 이다.

$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) = 36 - 18 = 18$ 이다.

3. 각 자리의 숫자의 합이 5 보다 작은 두 자리 자연수의 집합을 A 라 할 때, $n(A)$ 를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A = \{10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31, 40\}$

$n(A) = 10$

4. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개인 집합은 a 개이고, 원소가 5 개인 집합은 b 개이다. 이때, $a + b$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 42

해설

집합 A 의 원소 2개를 짝짓는 방법은
 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\},$
 $\{1, 7\},$
 $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\},$
 $\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}$
 $\{4, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}$
 $\{5, 6\}, \{5, 7\},$
 $\{6, 7\}$
따라서, 원소가 2개인 부분집합의 개수는
 $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ (개)이다.
집합 A 의 부분집합 중 원소가 5개인 집합은 원소
2개를 짝짓고 남은 5개의 원소를 원소로 갖는 집
합이므로 원소가 2개인 부분집합의 개수와 같은
개수의 부분집합이 만들어진다. 즉 21개가 된다.
 $a = 21, b = 21$ 이므로 $a + b = 42$

5. 어느 학급에서 어느 날 갑자기 교과서를 검사하였더니
영어 책을 가져 온 학생이 15 명이고, 영어 책과 수학
책을 모두 가져 온 학생이 8 명, 영어 책 또는 수학 책을
가져 온 학생이 55 명이였다. 수학 책을 가져 온 학생은
몇 명인지 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 48 명

해설

영어 책을 가져 온 학생을 집합 A 라 하고, 수학
책을 가져 온 학생을 B 라고 하자.
그렇다면 영어 책과 수학 책을 모두 가져 온 학생
은 $A \cap B$ 가 된다.
수학 책을 가져 온 학생, 즉 $n(B)$ 를 구하는 것이
다.
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $55 = 15 + x - 8$
그러므로 x 는 48이다.

6. 두 집합 $A = \{1, 2, \{3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$, $B =$
 $\{0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집
합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다.
따라서 $n(A) = 4, n(B) = 3$ 이고, $n(A) - n(B) =$
1 이다.

7. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 집합 A 의
부분집합의 개수가 집합 B 의 부분집합의 개수보다
16 개 더 많을 때, $n(A) + n(B)$ 의 값을 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 9

해설

부분집합의 개수는 (2의 거듭제곱) 개이므로
 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... 이다.
 이 중에서 차가 16인 두 수는 16과 32이다.
 $\therefore 2^{n(A)} = 32 = 2^5, 2^{n(B)} = 16 = 2^4$
 $(\because n(A) > n(B))$
 $\therefore n(A) = 5, n(B) = 4$
 $\therefore 5 + 4 = 9$

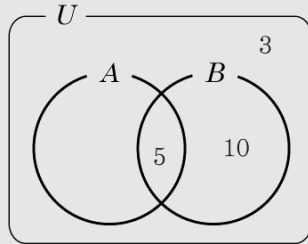
8. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 25 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A^c \cap B) = 10, n(B^c) = 10, n(A^c \cap B^c) = 3$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값을 구하여라.
 [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$n(U) = 25$ 이므로
 $n(B) = n(U) - n(B^c) = 25 - 10 = 15$
 $A^c \cap B = B - A$ 이므로
 $n(B - A) = n(A^c \cap B) = 10$
 $n((A \cup B)^c) = n(A^c \cap B^c) = 3$
 벤 다이어그램에 각 부분의 원소의 개수를 적어보면 따라서 $n(A - B) = 25 - (5 + 10 + 3) = 7$ 이다.



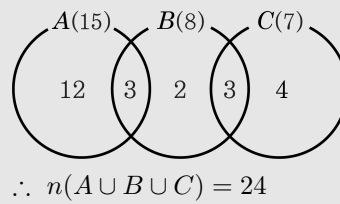
9. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 15, n(B) = 8, n(C) = 7, n(A \cap B) = 3, n(B \cup C) = 12, A \cap C = \emptyset$ 일 때, $n(A \cup B \cup C)$ 의 값을 구하여라.
 [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



10. $n(\{0, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset)$ 를 구하여라.
 [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$n(\{0, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset) = 4 \times 2 - 0 = 8$

11. 집합 $U = \{x | x \leq 10, x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 있다. $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = U$ 이고, A 의 모든 원소의 합은 15 일 때, 집합 B 의 모든 원소의 합을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

$U = \{x | x \leq 10, x \text{는 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$
 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = U$ 집합 A, B 는 서로소이고, 전체집합 U 의 모든 원소를 나누어 가진다.
 전체집합 U 의 모든 원소의 합은 $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$ 이고,
 A 의 모든 원소의 합은 15 이므로
 집합 B 의 모든 원소의 합은 $55 - 15 = 40$

12. 집합 $P = \{3x + 1 | x \text{는 6보다 작은 자연수}\}$ 의 부분집합 $A = \{4, 7\}, B = \{4, 10\}$ 에 대하여 $A \cap X^c = B \cap X^c$ 를 만족하는 집합 P 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8개

해설

$P = \{3x + 1 | x \text{는 6보다 작은 자연수}\}$
 $= \{4, 7, 10, 13, 16\}$
 $A = \{4, 7\}, B = \{4, 10\}$
 $A \cap X^c = B \cap X^c \rightarrow A - X = B - X$ 이므로 X 는 원소 7, 10 을 반드시 포함하는 P 의 부분집합이다.
 따라서 부분집합 X 의 개수는 $2^{5-2} = 8$ (개)

13. 자연수 k 에 대하여 집합 $A_k = \{x | k < x \leq 20k \text{인 자연수}\}$ 일 때, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_{10})$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A_1 = \{2, 3, \dots, 20\}$
 $A_2 = \{3, 4, \dots, 40\}$
 $A_3 = \{4, 5, \dots, 60\}$
 $\vdots$
 $A_{10} = \{11, 12, 13, \dots, 200\}$
 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10} = \{11, 12, \dots, 20\}$
 $\therefore n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10}) = 10$

14. $n(U) = 50$ 인 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, $n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A))$ 의 값을 구하여라.

- $n(A) = 38, n(B) = 31, n(C) = 27$
- $n(A \cap B \cap C) = 9, n((A \cup B \cup C)^c) = 0$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$n(U) = 50$, $n((A \cup B \cup C)^c) = 0 \rightarrow n(A \cup B \cup C) = 50$,
 $n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) = 50$ 이므로,
 $38 + 31 + 27 - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + 9 = 50$,
 $\rightarrow n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 55$
 $\therefore n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) = n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 2 \times n(A \cap B \cap C) = 55 - 18 = 37$

해설

그림에 색칠된 부분은 $A - B - C$ 인 것을 알 수 있다.

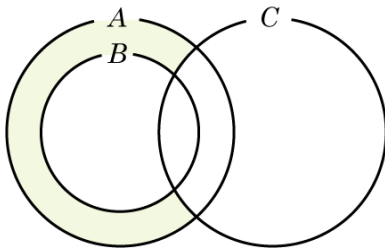
$A = \{x | x < 20, x \text{는 홀수인 자연수}\}$
 $= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$,

$B = \{2x + 1 | x \text{은 5보다 작은 자연수}\}$
 $= \{3, 5, 7, 9\}$,

$C = \left\{x \mid \frac{x+3}{10} = n, n \text{은 자연수}\right\} = \{7, 17, 27, 37, 47, \dots\}$,

따라서 $(A - B) - C = \{1, 11, 13, 15, 19\}$ 이고 원소의 개수는 5 개이다.

15. 집합 $A = \{x | x < 20, x \text{는 홀수인 자연수}\}$, $B = \{2x + 1 | x \text{은 5보다 작은 자연수}\}$,
 $C = \left\{x \mid \frac{x+3}{10} = n, n \text{은 자연수}\right\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 5 개