

단원 종합 평가

1. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ 에 대하여, 다음 중 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 를 만족하는 집합 B 는?

[배점 3, 중하]

- ① $B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 홀수}\}$
- ② $B = \{x \mid x \text{는 } 13 \text{ 이하의 자연수}\}$
- ③ $B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$
- ④ $B = \{x \mid x \text{는 } 14 \text{보다 작은 홀수}\}$
- ⑤ $B = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{ 이상 } 15 \text{ 이하의 자연수}\}$

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면, $A = B$ 이다.
따라서 보기 중 집합 A 와 집합 B 가 같은 것을 찾는다.

- ① $B = \{1, 3, 5, \dots, 19\}$
- ② $B = \{1, 2, 3, \dots, 13\}$
- ③ $B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$
- ④ $B = \{1, 3, 5, \dots, 13\}$
- ⑤ $B = \{2, 3, 4, \dots, 15\}$

2. 청산중학교 1 학년 어떤 반에서 수학을 좋아하는 학생이 18 명, 과학을 좋아하는 학생 12 명, 수학 또는 과학을 좋아하는 학생이 23 명이다. 수학과 과학을 모두 좋아하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 7명

해설

수학을 좋아하는 학생을 집합 A 라 하고, 과학을 좋아하는 학생을 B 라고 하자.

그렇다면 수학 또는 과학을 좋아하는 학생은 $A \cup B$ 가 된다.

수학과 과학을 모두 좋아하는 학생, 즉 $A \cap B$ 를 구하는 것이다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$23 = 18 + 12 - x$$

그러므로 x 는 7이다.

3. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에서 홀수는 반드시 포함하고, 4 의 배수는 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

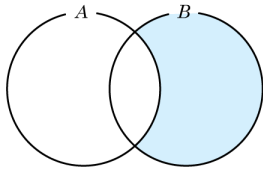
▶ 답 :

▶ 정답 : 8개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 이므로
2(홀수, 4의 배수를 뺀 원소의 개수) $= 2^{10-5-2} = 2^3 = 8$ (개)

4. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은?



[배점 4, 중중]

- ① $\{x|x \in A \text{ 그리고 } x \in B\}$
- ② $\{x|x \notin A \text{ 그리고 } x \in B\}$
- ③ $\{x|x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$
- ④ $\{x|x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$
- ⑤ $\{x|x \notin A \text{ 또는 } x \in B\}$

해설

주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분은 ② $\{x|x \notin A \text{ 그리고 } x \in B\}$ 이다.

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 일 때, $A \cup X = A$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 4개

해설

$A \cup X = A$ 에서 $X \subset A$,

$(A \cap B) \cup X = X$ 에서 $(A \cap B) \subset X$ 이므로

$(A \cap B) \subset X \subset A$

$\{2, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 4, 8\}$

집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 2, 4 를 반드시 포함하는 집합이므로 그 개수는 $2^2 = 4$ (개)

6. 집합 $A = \{x | x < 20, x = 3n + 1 (n \text{은 자연수})\}$ 라고 할 때, 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 56개

해설

$A = \{4, 7, 10, 13, 16, 19\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개) 이고, 이 중에서 홀수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 4, 10, 16 으로 만든 부분집합이므로 $2^3 = 8$ (개) 이다.

$\therefore 64 - 8 = 56$ (개)

7. 세 집합 $A = \{x | x = 2 \times n - 1, n \text{은 자연수}\}$, $B = \{x | x \text{는 20미만의 소수}\}$, $C = \{x | x \text{는 18의 약수}\}$ 에 대하여 $B \cup (C \cap A)$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 87

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면 $A = \{2 \times 1 - 1, 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\}$ 즉 홀수의 집합과 일치한다.

$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이다.

먼저 C 와 A 의 교집합을 구하면 $\{1, 3, 9\}$ 이다.

$B \cup (C \cap A) = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

따라서 모든 원소의 합을 구하면 $1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 17 + 19 = 87$

8. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 15$, $n(B) = 8$, $n(C) = 7$, $n(A \cap B) = 3$, $n(B \cup C) = 12$, $A \cap C = \emptyset$ 일 때, $n(A \cup B \cup C)$ 의 값을 구하여라.

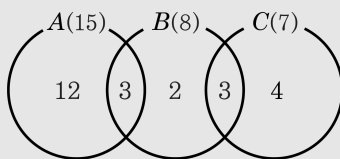
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 24

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore n(A \cup B \cup C) = 24$

9. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 40$, $n(A \cap B) = 5$, $n(A^c \cap B^c) = 3$ 일 때, $n(A - B) + n(B - A)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 32

해설

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$$

$$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 40 - 3 = 37$$

$$n(A - B) + n(B - A)$$

$$= n(A \cup B) - n(A \cap B)$$

$$= 37 - 5 = 32$$

10. 근영이는 이번 생일에 남자친구한테 저금통을 선물받았다. 이 저금통은 비밀번호가 다섯 자리 수로 된 자물쇠가 달려있고 비밀번호는 다음 문제를 풀어야 알 수 있다.

다음 문제를 보고, 비밀번호가 될 수 있는 다섯 숫자를 원소나열법으로 나타내어라.

두 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 4, 6\}$ 에 대하여, 자물쇠의 비밀번호는 집합 A 에서 홀수인 원소와 집합 B 에서 짝수인 원소를 합친 것이다.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

해설

집합 A 에서 홀수인 원소는 1, 3, 집합 B 에서 짝수인 원소는 2, 4, 6이므로 자물쇠의 비밀번호는 1, 2, 3, 4, 6으로 되어있다.

11. $n(\{0, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset)$ 를 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$n(\{\{0\}, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset) = 4 \times 2 - 0 = 8$$

12. 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 작은 순서로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 으로 나타낼 때, $a_2 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하여라.

- 집합 A 의 원소는 항상 1 보다 크거나 같다.
- $a_1 = 1$, $x \in A$ 이면, $\frac{3}{2} \times x \in A$ 이다.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{141}{16}$

해설

$$\begin{aligned} a_1 = 1 \text{ 이면 } a_2 &= \frac{3}{2} \times a_1 \text{ 이고 이러한 방식으로} \\ \text{집합 } A \text{ 를 구하면,} \\ \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} &= \\ \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)} \times a_1\right\} \\ , \\ a_2 &= \frac{3}{2}, a_3 = \frac{9}{4}, a_5 = \frac{81}{16} \text{ 이다.} \\ \therefore a_2 + a_3 + a_5 &= \frac{141}{16} \end{aligned}$$

13. 원소의 개수가 40 개인 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cap B) = k$ 라고 할 때, $n(A) = n(A^c) = 5k$, $n(B - A) = 3k$ 이다. 이 때 $n(A^c \cap B^c)$ 의 값을 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} n(A) = n(A^c) = 5k &\rightarrow n(U) = 40 \text{ 이므로 } 10k = 40, k = 4 \text{ 이고,} \\ n(A) = 20, n(B - A) &= 12 \text{ 이므로 } n(A \cup B) = 32 \\ \therefore n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 32 = 8 \end{aligned}$$

14. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{4, 8, 12, 16\}$ 에 대하여 $A * B = A - (A \cap B)$ 라 할 때, $B * (A * B)$ 의 집합을 구하여라.
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{4, 8, 12, 16\}$

해설

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{4, 8\} \\ A * B &= \{2, 6\} \\ B \cap (A * B) &= \emptyset \\ B * (A * B) &= B = \{4, 8, 12, 16\} \end{aligned}$$

15. 집합 $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중, 두 번째로 작은 원소가 5 인 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 개

해설

$\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중, 두 번째로 작은 원소가 5 인 부분집합을 찾으려면,

5 는 반드시 포함되고 1, 2, 3 중에 하나만 포함되어야 한다.

(1) 1 과 5 는 포함되고, 2, 3 은 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)

(2) 2 와 5 는 포함되고, 1, 3 은 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)

(3) 3 과 5 는 포함되고, 1, 2 는 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)

따라서 $4 + 4 + 4 = 12$ (개)