

실력 확인 문제

1. 네 자리의 이진법으로 나타낼 수 있는 수 중에서 홀수를 모두 구하시오. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 9

▷ 정답: 11

▷ 정답: 13

▷ 정답: 15

해설

네 자리 이진법으로 나타내는 수 중에서 가장 작은 수는 $1000_{(2)} = 8$ 이고, 가장 큰 수는 $1111_{(2)} = 15$ 이다.

그러므로 이 안에 속하는 홀수는 9, 11, 13, 15 이다.

2. 다음 중 원소의 개수가 0 이 아닌 유한집합은? [배점 3, 하상]

① $\{x \mid x \text{는 일의 자리의 숫자가 1인 짝수}\}$

② $\{x \mid x \text{는 2로 나누었을 때 나머지가 1인 자연수}\}$

③ $\{x \mid x \text{는 8보다 큰 8의 약수}\}$

④ $\{x \mid x \text{는 두 자리의 2의 배수}\}$

⑤ $\{x \mid x \text{는 } 1 < x < 2 \text{인 분수}\}$

해설

① \emptyset

② $\{1, 3, 5, \dots\}$

③ \emptyset

④ $\{10, 12, 14, 16, \dots, 98\}$

⑤ $\left\{\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots\right\}$

3. 두 자연수 p, q 의 최대공약수가 792 일 때, p, q 의 공약수의 개수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 24개

해설

공약수는 최대공약수의 약수이므로 공약수의 개수는 792 의 약수의 개수이다.

$$792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$$

$$\therefore (3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 24 \text{ (개)}$$

4. 두 집합 $A = \{x \mid x = 2 \times n, n \text{은 자연수}\}$, $B = \{y \mid y \in A, 1 \leq y \leq 20\}$ 에 대하여 $n(B)$ 를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, \dots\}$

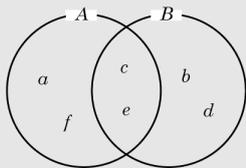
$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $B = \{b, c, d, e\}$, $A \cap B = \{c, e\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$ 일 때, 집합 A 는?
[배점 4, 중중]

- ① $\{a, c, e\}$ ② $\{a, c, f\}$
- ③ $\{a, c, e, f\}$ ④ $\{a, b, c, f\}$
- ⑤ $\{a, b, e, f\}$

해설

$B = \{b, c, d, e\}$, $A \cap B = \{c, e\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$ 이므로 벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.



그러므로 집합 A 는 $\{a, c, e, f\}$ 가 된다.

6. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 5\}$ 에 대하여 $(A \cup B)^c \subset X$, $(A - B)^c \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?
[배점 4, 중중]

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개
- ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$(A \cup B)^c = \{4\}$, $(A - B)^c = \{2, 4, 5\}$

$(A \cup B)^c \subset X \subset (A - B)^c$, 즉 $\{4\} \subset X \subset \{2, 4, 5\}$ 이다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$ (개) 이다.

7. 두 집합 $A = \{3, 5, a + 1\}$, $B = \{8, a + 4, 2 \times a + 1, 16\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{8\}$ 일 때, $(A - B) \cup (B - A)$ 는?
[배점 4, 중중]

- ① $\{3, 5, 7, 9\}$ ② $\{3, 4, 5, 7\}$
- ③ $\{3, 5, 8, 11\}$ ④ $\{3, 5, 11, 15, 16\}$
- ⑤ $\{3, 5, 8, 11, 15\}$

해설

$A \cap B = \{8\}$ 이므로 $a + 1 = 8, a = 7$ 이다.

따라서 $A = \{3, 5, 8\}$, $B = \{8, 11, 15, 16\}$ 이므로 $(A - B) \cup (B - A) = \{3, 5\} \cup \{11, 15, 16\} = \{3, 5, 11, 15, 16\}$ 이다.

8. 집합 $A = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$ 의 부분집합 중에서 3 의 약수를 모두 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 8개

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중 원소 1, 3 을 모두 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

9. 9 로 나누면 나머지가 8, 8 로 나누면 나머지가 7, 7 로 나누면 나머지가 6, 6 으로 나누면 나머지가 5, 5 로 나누면 나머지가 4 인 자연수 중에서 최소의 자연수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 2519

해설

조건을 만족하는 수는 (9, 8, 7, 6, 5 의 공배수)-1 의 꼴이고 9, 8, 7, 6, 5 의 최소공배수는 2520 이다. 따라서 최소의 자연수는 $2520 - 1 = 2519$ 이다.

10. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 50, n(A \cup B) = 38, n(A \cap B) = 9, n(B - A) = 16$ 일 때, $n((A - B)^C)$ 을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 37

해설

$$\begin{aligned} n(A - B) &= n(A \cup B) - n(A \cap B) - n(B - A) \\ &= 38 - 9 - 16 \\ &= 13 \\ n((A - B)^C) &= n(U) - n(A - B) = 50 - 13 = 37 \end{aligned}$$

11. $5^4 \times \square$ 의 약수의 개수가 15 개일 때, \square 안에 들어갈 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$\square = a^x$ (a 는소수) 라고 하면 $5^4 \times a^x$ 의 약수의 개수는 15개이므로 $(4 + 1) \times (x + 1) = 15, x + 1 = 3, x = 2$ 이다. 또한 가장 작은 자연수가 되기 위해서는 $a = 2$ 이다. 따라서 $\square = a^x = 2^2 = 2 \times 2 = 4$ 이다.

12. 집합 $A = \{x | x \text{는 } 468 \text{의 소인수}\}$ 일 때, 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 8개

해설

$468 = 2^2 \times 3^2 \times 13$ 이므로 $A = \{2, 3, 13\}$ 따라서, 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^3 = 8$ (개) 이다.

13. 네 집합 $A = \{x | x \text{는 } 36 \text{의 약수}\}$, $B = \{x | x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$, $C = \{x | x \text{는 } a \text{의 약수}\}$, $D = \{x | x \text{는 } a \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $C \subset A$, $D \subset B$ 가 동시에 성립하기 위한 a 의 값을 모두 구하여라. (단 $a > 0$)

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 6

▷ 정답: 12

▷ 정답: 18

▷ 정답: 36

해설

$C \subset A$ 이므로 a 는 36 의 약수
 $D \subset B$ 이므로 a 는 6 의 배수
 $\therefore a = 6, 12, 18, 36$

14. 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 작은 순서로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 으로 나타낼 때, $a_2 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하여라.

- 집합 A 의 원소는 항상 1 보다 크거나 같다.
- $a_1 = 1$, $x \in A$ 이면, $\frac{3}{2} \times x \in A$ 이다.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{141}{16}$

해설

$a_1 = 1$ 이면 $a_2 = \frac{3}{2} \times a_1$ 이고 이러한 방식으로 집합 A 를 구하면,

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)} \times a_1\right\}$$

,
 $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{9}{4}$, $a_5 = \frac{81}{16}$ 이다.

$$\therefore a_2 + a_3 + a_5 = \frac{141}{16}$$

15. 두 수의 합이 24, 최대공약수가 3, 최소공배수가 45 일 때, 두 수의 차를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

두 수를 $3 \times a, 3 \times b$ 라 두면,

$$3 \times a + 3 \times b = 24 \rightarrow a + b = 8 ,$$

$$3 \times a \times b = 45 \rightarrow a \times b = 15 ,$$

$a = 5, b = 3$ 이므로 두 수는 15, 9 이다.

$$\therefore (\text{두 수의 차}) = 15 - 9 = 6$$