

# 단원 종합 평가

1. 다음 글을 읽고, 승훈이가 초대 한 초등학교 친구 중 중학교가 다른 친구는 모두 몇 명인지 구하여라.

엄마 : 초대 한 친구 중에 초등학교 친구와 중학교 친구는 각각 몇 명이니?

승훈 : 초등학교 친구 7명과 중학교 친구 5명요. 이 말을 들은 엄마는 12명이 먹을 수 있는 음식을 준비했다.

(그 날 저녁)

친구들 : 안녕하세요.

엄마 : 어서들 와라. 그런데! 승훈아! 왜 10명이니? 안 온 사람 있니?

승훈 : 아니요. 제가 초대 한 친구는 모두 왔는데요.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 5명

해설

승훈이가 초대 한 초등학교 친구와 중학교 친구는 모두 10(명)이다.

또한 초등학교와 중학교가 같은 친구는  $7+5-10=2$  (명)이다.

따라서 초등학교 친구 중 중학교 친구가 다른 친구는 초등학교 친구 중 초등학교와 중학교가 같은 친구를 제외한  $7-2=5$  (명)이다.

2. 다음 중 약수의 개수가 가장 많은 것은?

[배점 3, 중하]

①  $5^3$       ②  $2 \times 3$       ③  $2^2 \times 7^2$

④  $5^2 \times 7$       ⑤  $13^6$

해설

각각의 약수의 개수를 구하면 다음과 같다.

①  $3+1=4$  (개)

②  $(1+1) \times (1+1)=4$  (개)

③  $(2+1) \times (2+1)=9$  (개)

④  $(2+1) \times (1+1)=6$  (개)

⑤  $6+1=7$  (개)

3. 두 수  $2^2 \times 3 \times 5^2$ ,  $2 \times 3^2 \times 7$ 의 공약수를 모두 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

▶ 정답 : 2

▶ 정답 : 3

▶ 정답 : 6

해설

두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수와 같다.

최대공약수가  $2 \times 3 = 6$  이므로

6의 약수는 1, 2, 3, 6

4. 우리 반 40 명의 학생 중 미술시간에 물감을 준비해 온 학생은 26 명, 색연필을 준비해 온 학생은 23 명, 아무것도 준비하지 않은 학생은 3 명이다. 물감과 색연필 두 가지를 모두 준비해 온 학생 수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 명

해설

$$n(U) = 40, n(A) = 26, n(B) = 23$$

$$n(A \cup B) = 40 - 3 = 37$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{ 이므로}$$

$$37 = 26 + 23 - n(A \cap B) \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } n(A \cap B) = 12 \text{ 이다.}$$

5. 집합  $A = \{x \mid x \text{는 } 81 \text{의 소인수}\}$  일 때,  $n(A)$  를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$81 = 3^4$$

$$A = \{3\}$$

$$\therefore n(A) = 1$$

6.  $2^{13} \times 3^4 \times 5^{10}$  을 십진법으로 나타내었을 때 끝자리의 연속된 0의 개수는  $a$  개, 이진법으로 나타내었을 때 끝자리의 연속된 0의 개수는  $b$  개이다.  $a + b$ 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$$2^{13} \times 3^4 \times 5^{10} = 2^3 \times 3^4 \times 2^{10} \times 5^{10}$$

$$= 2^3 \times 3^4 \times 10^{10}$$

이므로  $a = 10$  이다.

$$2^{13} \times 3^4 \times 5^{10} = 3^4 \times 5^{10} \times 2^{13}$$

이므로  $b = 13$  이다.

$$\therefore 10 + 13 = 23$$

7.  $2^2 \times 5^2 \times a^2$  의 약수의 개수는 모두 몇 개인지 구하여라.

(단,  $a$  는 2, 5 를 제외한 소수이다.) [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 27 개

해설

$$(2 + 1) \times (2 + 1) \times (2 + 1) = 27(\text{개})$$

8. 두 집합  $A = \{x \mid x \text{는 } n \text{의 약수}\}$ ,  $B = \{x \mid x \text{는 } 54 \text{의 약수}\}$ 에 대하여  $A \subset B$ ,  $A \neq B$  이기 위한 자연수  $n$ 의 값은 모두 몇 개인지 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7개

해설

$n$ 은 54를 뺀 54의 약수이므로 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27이다. 따라서 7개이다.

9. 두 집합  $A = \{1, 2, 4, 5, 7\}$ ,  $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{이하의 홀수}\}$ 에 대하여  $X \cap A = X$ 와  $X \cup (A \cap B) = X$ 를 만족하는 집합  $X$ 의 개수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8개

해설

$X \cap A = X$ 이므로  $X \subset A$

$X \cup (A \cap B) = X$ 이므로  $(A \cap B) \subset X$

$A \cap B = \{1, 5\}$

$\{1, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 4, 5, 7\}$

집합  $X$ 는 집합  $A$ 의 부분집합 중 원소 1, 5를 반드시 포함하는 집합이다.

$\therefore 2^{5-2} = 2^3 = 8$  (개)

10. 자연수  $a, b, c$ 에 대하여  $5 \times a = 7 \times b = c^2$ 을 만족하는  $c$ 의 값으로 가능하지 않은 것은? [배점 5, 중상]

① 35                      ② 70                      ③ 105

④ 140                      ⑤ 180

해설

$5 \times a = 7 \times b = c^2$ 에서

i)  $a = 5 \times 7^2$ ,  $b = 5^2 \times 7$ 일 때,  $5 \times (5 \times 7^2) = 7 \times (5^2 \times 7) = (5 \times 7)^2 = 35^2$

ii)  $a = 2^2 \times 5 \times 7^2$ ,  $b = 2^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때,  $5 \times (2^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (2^2 \times 5^2 \times 7) = (2 \times 5 \times 7)^2 = 70^2$

iii)  $a = 3^2 \times 5 \times 7^2$ ,  $b = 3^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때,  $5 \times (3^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (3^2 \times 5^2 \times 7) = (3 \times 5 \times 7)^2 = 105^2$

iv)  $a = 4^2 \times 5 \times 7^2$ ,  $b = 4^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때,  $5 \times (4^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (4^2 \times 5^2 \times 7) = (4 \times 5 \times 7)^2 = 140^2$

따라서  $c$ 의 값으로 가능한 것은 35, 70, 105, 140, ... 이다.

11. 다음 네 수  $2^a \times 3^5 \times 7 \times 175$ ,  $2^5 \times 3^b \times 5^3 \times 7^2$ ,  $2^6 \times 3^3 \times 5^c \times 7^3$ ,  $144 \times 75 \times 7^d$ 의 최대공약수가  $2^2 \times 7 \times 90$ 일 때,  $(a + b + c) \times d$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

최대공약수가  $2^2 \times 7 \times 90 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$  이고  
주어진 각 수를 정리한 값이

$$2^a \times 3^5 \times 7 \times 175 = 2^a \times 3^5 \times 5^2 \times 7^2$$

$$2^5 \times 3^b \times 5^3 \times 7^2$$

$$2^6 \times 3^3 \times 5^c \times 7^3$$

$$144 \times 75 \times 7^d = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^d \text{ 이다.}$$

주어진 네 수의 2 의 지수를 비교하면

모두 3 보다 크므로  $a$  는 3 이어야 한다.

주어진 네 수의 3 의 지수를 비교하면

모두 2 보다 크므로  $b$  는 2 이어야 한다.

주어진 네 수의 5 의 지수를 비교하면

모두 1 보다 크므로  $c$  는 1 이어야 한다.

주어진 네 수의 7 의 지수를 비교하면

모두 1 보다 크므로  $d$  는 1 이어야 한다.

따라서  $a = 3, b = 2, c = 1, d = 1$  이므로

$$(a + b + c) \times d = (3 + 2 + 1) \times 1 = 6 \text{ 이다.}$$

12.  $96a = b^3$  을 만족하는 가장 작은 자연수  $a, b$  를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 :  $a = 18$

▶ 정답 :  $b = 12$

해설

$$96a = 2^5 \times 3 \times a = b^3$$

지수가 3 의 배수가 되도록 작은 수를 곱해주어야 한다.

$$\therefore a = 2 \times 3^2 = 18$$

$$2^6 \times 3^3 = (2^2 \times 3)^3 = 12^3$$

$$\therefore b = 12$$

13. 집합  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  의 부분집합 중 원소의 개수가 세 개인 부분집합에 들어 있는 모든 원소들의 합을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 90

해설

집합  $A$  의 부분집합 중에서 원소가 3 개인 부분집합은

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\},$   
 $\{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\},$   
 $\{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$  의 10 개이고,

이 부분집합들에는 집합  $A$  의 원소가 6 개씩 들어 있으므로,  $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 6 = 90$  이 된다.

14.  $n(\{0, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset)$  를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 8

해설

$$n(\{0, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset) = 4 \times 2 - 0 = 8$$

15. 50 보다 큰 두 자리의 자연수  $A$  와 21 의 최대공약수가 7 이다. 이러한 자연수  $A$  는 모두 몇 개인지 구하여라.  
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

$50 < A < 99$  이고 7 의 배수이다.

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) A \quad 21} \\ a \quad 3 \end{array}$$

그런데,  $a$  는 3 의 배수가 되면 안되므로  
 $A$  는 50 보다 큰 7 의 배수  
56, 63, 70, 77, 84, 91, 98 중 3 의 배수를  
제외하면 5 개이다.  
∴ 5 개

16. 다음 수 중 어떤 자연수의 제곱이 되는 수는?  
[배점 5, 상하]

- ① 27                      ② 44  
③  $2 \times 3^2$                 ④  $2^2 \times 3 \times 5^2$   
⑤  $2^4 \times 7^2$

해설

⑤ 지수가 모두 짝수이므로 자연수의 제곱이 되는 수이다.

17.  $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 9 \times 10$  을 십진법으로 나타낼 때, 끝자리에 연속한 0 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2 개

해설

십진법으로 나타낼 때 끝자리에서 계속되는 0 의 개수는 10 의 거듭제곱과 관계가 있다. 즉, 10 의 배수가 아닌 자연수  $a$  에 대하여  $N = a \times 10^n$  일 때,  $N$  의 끝자리에서 계속되는 0 은  $n$  개이다.

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 9 \times 10 \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (2 \times 5) \\ &= 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \\ &= 3^4 \times 7 \times (2^8 \times 5^2) \\ &= 3^4 \times 7 \times 2^6 \times (2^2 \times 5^2) \\ &= 3^4 \times 7 \times 2^6 \times 10^2 \end{aligned}$$

따라서 끝자리에서 연속되는 0 은 2 개이다.

18. 무한집합  $U$  의 두 부분집합  $A, B$  가  $(A \cup B)^c = A \cap B^c = \emptyset$  일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?  
[배점 6, 상중]

- ①  $B$  는 무한집합이다.  
②  $B$  는 무한집합이다.  
③  $A$  가 무한집합이면  $B$  는 유한집합이다.  
④  $A$  가 유한집합이면  $B$  는 유한집합이다.  
⑤  $A, B$  모두 무한집합이 아니다.

**해설**

- ①  $A$  가 유한집합이면,  $(A \cup B)^c = \emptyset$  가 되려면  $A \cup B = U$  이므로  $B$  는 무한집합이어야 한다.  
 ②  $A$  가 무한집합이면,  $A \cap B^c = \emptyset$  가 되려면  $A - B = \emptyset$ ,  $A \subset B$  이므로  $B$  도 무한집합이어야 한다. 따라서  $B$  는 항상 무한집합이다.

19. 집합  $A = \{x \mid x \text{는 } 3^7 \times 5^4 \text{의 약수 중에서 } a^2 \text{이 되는 수}\}$  일 때,  $n(A)$  를 구하여라. (단,  $a$  는 자연수)

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 12

**해설**

$3^7 \times 5^4$  의 약수 중 (자연수)<sup>2</sup> 이 되는 수는  
 $1, 3^2, (3^3)^2, 5^2, (5^2)^2, (3 \times 5)^2,$   
 $(3 \times 5^2)^2, (3^2 \times 5)^2, (3^2 \times 5^2)^2, (3^3 \times 5)^2,$   
 $(3^3 \times 5^2)^2$  이다.  
 $\therefore n(A) = 12$

20. 200 개의 10 원 동전이 일렬로 나란히 놓여 있다. 이 중 처음에는 200 개의 동전 모두를 50 원 동전으로 바꾸고, 두 번째에는 왼쪽에서 짝수 번째에 있는 동전만 10 원 동전으로 다시 바꾸고, 세 번째에는 3 번째, 6 번째, 9 번째, ... 동전 중 10 원 동전인 것은 50 원 동전으로 50 원 동전인 것은 10 원 동전으로 바꾼다. 같은 방법으로 네 번째, 다섯 번째, ..., 200 번째에서는 4 의 배수번째, 5 의 배수번째, ... 200 의 배수번째 동전의 종류를 바꾼다고 할 때, 마지막에 놓여있는 금액은 처음보다 얼마 늘어나는지 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 560 원

**해설**

주어진 조건을 보면  $n$  번째 동전은  $n$  의 약수의 개수만큼 뒤집어진다는 것을 알 수 있다.

1 을 제외한 수 중 약수의 개수가 홀수 개인 수는 어떤 수의 제곱이 되는 수이므로,

홀 수 변 뒤 집 어 지 는 수 는  
 $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196$  이다.

따라서, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196 번째 동전만 50 원이 되고 나머지는 모두 10 원이므로

$\therefore$  (마지막에 놓여있는 금액 - 처음 놓여있는 금액)  $= 14 \times 40 = 560$  (원)