

실력 확인 문제

1. $2^4 \times \square$ 의 약수의 개수가 15 개일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.
[배점 3, 하상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 9

해설

$$15 = 5 \times 3 = (4 + 1) \times (2 + 1)$$

$\square$ 에 알맞은 가장 작은 자연수는 $3^2 = 9$

$\therefore 9$

2. 다음 보기 중 합성수인 것을 골라라.

보기

- ㉠ 1 ㉡ 17 ㉢ 31
㉣ 37 ㉤ 64

[배점 3, 하상]

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉤

해설

합성수는 1 보다 큰 자연수 중에서 소수가 아닌 수이다. 따라서 합성수는 64 이다.

3. 60 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수는?
[배점 3, 하상]

- ① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 20

해설

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

곱해야 할 가장 작은 자연수는 $3 \times 5 = 15$

4. 다음 중 유한집합인 것을 모두 골라라.

- ㉠ $\{x \mid x \text{는 자연수}\}$
㉡ $\{x \mid x \text{는 가장 작은 자연수}\}$
㉢ $\{x \mid 0 < x < 1, x \text{는 자연수}\}$
㉣ $\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\}$
㉤ $\{x \mid x \text{는 1보다 작은 수}\}$
㉥ $\{x \mid x \text{는 100보다 작은 2의 배수}\}$

[배점 3, 하상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉡

▶ 정답 : ㉢

▶ 정답 : ㉣

▶ 정답 : ㉥

해설

- ㉠ $\{1, 2, 3, \dots\}$ 이므로 무한집합이다.
- ㉡ 가장 작은 자연수는 1이므로 유한집합이다.
- ㉢ 0과 1 사이에 자연수는 존재하지 않으므로 공집합 즉, 유한집합이다.
- ㉣ 유한집합
- ㉤ 1보다 작은 수는 $0, -1, -\frac{1}{2}, \dots$ 등 무수히 많
이 존재하므로 무한집합이다.
- ㉥ $\{2, 4, 6, 8, \dots, 96, 98\}$ 이므로 유한집합이다.

5. 두 자연수 A, B 의 최대공약수는 4, 최소공배수는 144
일때, $A + B$ 를 구하여라. (단, $A > B$)
[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 148

▷ 정답 : 52

해설

두 자연수를 $A = 4a, B = 4b$
(단, a, b 는 서로소, $a > b$)라고 하면
최소공배수 $144 = 4 \times 36 = 4 \times a \times b$
 $a \times b = 36$ 이므로
 $a = 36, b = 1$ 일 때 $A = 144, B = 4$ 이고,
 $a = 9, b = 4$ 일 때 $A = 36, B = 16$
 $\therefore A + B = 148, 52$

6. 다음 중 대소 관계가 옳은 것은? [배점 3, 중하]

- ㉠ $11 < 11_{(2)} < 111_{(2)}$
- ㉡ $13 < 1101_{(2)} < 18$
- ㉢ $12 < 10011_{(2)} < 17$
- ㉣ $11000_{(2)} < 111_{(2)} < 10$
- ㉤ $12 < 1101_{(2)} < 1110_{(2)}$

해설

- ㉠ $11_{(2)} = 3$ 이므로 $11_{(2)} < 11$
- ㉡ $1101_{(2)} = 13$ 이므로 $13 = 1101_{(2)}$
- ㉢ $10011_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 19$ 이므로
 $17 < 10011_{(2)}$
- ㉣ $11000_{(2)} > 111_{(2)}$
- ㉤ $1101_{(2)} = 13$ 이므로 $12 < 1101_{(2)}$

7. 두 수 $2^a \times 3^2, 2^2 \times 3^b \times 7$ 의 최대공약수가 $2^2 \times 3^2$
이고, 최소공배수가 $2^3 \times 3^2 \times 7$ 일 때, $a - b$ 의 값을
구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최소공배수에서 2 의 지수가 3 이므로 $a = 3$
최소공배수와 최대공약수에서 3 의 지수가 2 로
같으므로 $b = 2$
따라서 $a - b = 3 - 2 = 1$ 이다.

8. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 나머지와 다른 하나는?

[배점 3, 중하]

- ① $A - B$ ② $A - (A \cap B)$
 ③ $A \cap B^c$ ④ $(A \cup B) - B$
 ⑤ $U - (A \cup B)^c$

해설

- ① $A - B = \phi$
 ② $A - (A \cap B) = A - A = \phi$
 ③ $A \cap B^c = A - B = \phi$
 ④ $(A \cup B) - B = B - B = \phi$
 ⑤ $U - (A \cup B)^c = U - B^c = B$

9. 두 분수 $\frac{75}{n}, \frac{90}{n}$ 을 자연수로 만드는 n 의 개수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 4개

해설

$\frac{75}{n}, \frac{90}{n}$ 을 자연수로 만드는 자연수 n 은 75와 90의 공약수이다.
 75와 90의 최대공약수가 15 이므로 n 은 1, 3, 5, 15 이다.

10. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $n(A \cap B) = 1$ 일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 자연수들의 합을 구하여라.

(단, $\square$ 안에 들어갈 자연수는 10 보다 작다)

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 22

해설

$$15 = 3 \times 5$$

15와 $\square$ 의 공약수가 개수가 1개, 즉 서로소이므로

$\square$ 는 10미만의 자연수 중 3과 5의 배수가 아닌 수이므로 1, 2, 4, 7, 8이다.

따라서 $\square$ 안에 들어갈 수 있는 자연수들의 합은 22이다.

11. 어떤 역에는 각각 45분, 1시간 15분 간격으로 출발하는 두 종류의 열차가 있다. 하루 중 두 열차의 첫 출발 시각은 오전 6시로 같고, 이 역을 출발하는 마지막 열차의 출발 시각은 오후 9시이다. 첫차와 마지막차를 제외하고, 하루 중 오전 6시와 오후 9시 사이 두 열차가 동시에 출발하는 시각을 A 시 B 분이라 할 때, A, B 에 들어갈 수 있는 모든 숫자의 합을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 105

해설

열차가 동시에 출발하는 간격은 45 와 75 의 공배수이므로 $45 = 3^2 \times 5$, $75 = 3 \times 5^2$ 의 최소공배수는 $3^2 \times 5^2 = 225$ (분)이다.

따라서 오전 6 시와 오후 9 시 사이에 열차가 동시에 출발하는 시각은

오전 6 시+225 분= 오전 9 시 45 분

오전 6 시+450 분= 오후 1 시 30 분

오전 6 시+675 분= 오후 5 시 15 분이다.

∴ 오전 9 시 45 분, 오후 1 시 30 분, 오후 5 시 15 분

∴ $9 + 45 + 1 + 30 + 5 + 15 = 105$

12. 300 에 가장 가까운 11 의 배수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 297

해설

$11 \times 27 = 297$, $11 \times 28 = 308$ 이므로 300 에 가장 가까운 배수는 297 이다.

13. 전체집합 $U = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x | x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은? [배점 4, 중중]

① $A \cap B = \{2, 6\}$

② $A - B^c = \{2\}$

③ $A - B = \{8\}$

④ $A^c - B^c = \{6\}$

⑤ $A \cup B = \{1, 2, 4, 8\}$

해설

$A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로

① $A \cap B = \{2, 4\}$

② $A - B^c = \{2, 4\}$

③ $A - B = \{1, 8\}$

⑤ $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ 이다.

14. 전체집합 U 의 두 부분집합 A , B 가 다음을 만족할 때, $n(A) + n(B)$ 의 값은?

보기

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A^c \cap B = \{3, 4\}$

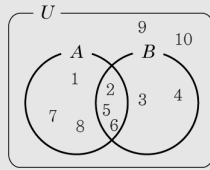
$A^c \cup B^c = \{1, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$

[배점 4, 중중]

① 3 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

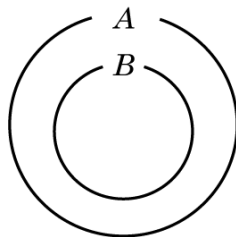
해설

주어진 조건을 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$A = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
 $\therefore n(A) + n(B) = 6 + 5 = 11$

15. 두 집합 A, B 사이의 관계가 다음 벤 다이어그램과 같고, 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수를 모두 고르면?



[배점 5, 중상]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$
 $\{4, 8, 12, \dots\} \subset A$
 $\{8, 16, 24, \dots\} \subset A$
 $\{10, 20, 30, \dots\} \subset A$
 따라서 ①, ③이다.

16. 두 집합 A, B 가 다음과 같을 때, $(A - B) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

$A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{이하의 홀수}\}$

[배점 5, 중상]

- ① 2개 ② 4개 ③ 6개
 ④ 8개 ⑤ 10개

해설

$(A - B) \cap X = X$ 이므로 $(A - B) \subset X$
 $(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$
 $\{2, 4, 8\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$
 집합 X 는 집합 $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 2, 4, 8을 반드시 포함하는 집합이다.
 $\therefore 2^{6-3} = 2^3 = 8(\text{개})$

17. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A - B) = 20$, $n(A^c \cap B) = 12$, $n(A \cup B) = 48$ 일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라.
 [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$A^c \cap B = B - A$
 $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(A^c \cap B)$
 $48 = 20 + n(A \cap B) + 12$
 $\therefore n(A \cap B) = 16$

18. $U = \{x | 0 \leq x < 15, x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분 집합 $A = \{x | x \text{는 } 12 \text{ 이하의 } 2 \text{의 배수}\}, B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 에 대하여 $n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$ 을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 이므로

$$\begin{aligned} n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \\ &= n((A - B) \cup (B - A)) \\ &= n(\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}) = 10 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

19. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 23, n(B) = 39, n(A \cup B) = 62$ 일 때, 다음 $\square$ 안에 들어갈 수 있는 기호가 아닌 것을 모두 골라라.

보기

$$A - B \square A$$

[배점 5, 중상]

- ① $\in$ ② $\subset$ ③ $\supset$ ④ $\not\subset$ ⑤ $=$

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$,
 $62 = 23 + 39 - n(A \cap B)$ 에서 $n(A \cap B) = 0$
 이므로 $A \cap B = \phi$ 이다.
 $A - B \square A$ 에서 $\square$ 안에 들어갈 수 있는 기호는 $\subset, \supset, =$ 이다.

20. 다음 $\square$ 안에 알맞은 세 자연수를 차례대로 나열한 것은?

보기

- ㉠ $n(\{x | x \text{는 } 12 \text{ 의 약수}\}) = \square$
 ㉡ 집합 $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = \square$
 ㉢ $A \subset \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ 이고 $n(A) = 3$ 을 만족하는 집합은 A 의 개수는 $\square$ 개이다.

[배점 5, 중상]

- ① 5, 0, 4 ② 6, 0, 3 ③ 6, 1, 3
 ④ 6, 1, 4 ⑤ 12, 1, 3

해설

- ㉠ $n(\{x | x \text{는 } 12 \text{ 의 약수}\}) = 6$
 ㉡ 집합 $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = 1$
 ㉢ $A \subset \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ 이고 $n(A) = 3$ 을 만족하는 집합 A 는 $\{\neg, \wedge, \vee\}, \{\neg, \wedge, \rightarrow\}, \{\neg, \vee, \rightarrow\}, \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ 이므로 4개이다.
 따라서 세 자연수는 차례대로 6, 1, 4 이다.

21. $2^4 \times 3^3 \times 5^3 \times 11^{10}$ 을 계산하여 십진법으로 나타낸 수로 바꿀 때, 마지막 자릿수부터 연속하여 나타나는 0의 개수는? [배점 5, 상하]

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

십진법으로 나타낼 때 끝자리에서 계속되는 0의 개수는 10의 거듭제곱과 관계가 있다. 즉, 10의 배수가 아닌 자연수 a 에 대하여 $N = a \times 10^n$ 일 때, N 의 끝자리에서 계속되는 0은 n 개이다.

$$\begin{aligned} & 2^4 \times 3^3 \times 5^3 \times 11^{10} \\ &= 3^3 \times 11^{10} \times (2^4 \times 5^3) \\ &= 3^4 \times 11^{10} \times 2 \times (2^3 \times 5^3) \\ &= 3^4 \times 11^{10} \times 2 \times 10^3 \end{aligned}$$

따라서 끝자리에서 연속되는 0은 3개이다.

22. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } a^2 \text{을 } 10 \text{으로 나눈 나머지, } a \text{는 자연수}\}$ 일 때, A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 64개

해설

제곱수의 일의 자리를 살펴보면 1^2 은 1, 2^2 은 4, 3^2 은 9, 4^2 은 6, 5^2 은 5, 6^2 은 6, 7^2 은 9, 8^2 은 4, 9^2 은 1, 10^2 은 0, 11^2 은 1, ... 이므로

$$A = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$$

따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개)이다.

23. 48에 어떤 수 x 를 곱하여 자연수의 제곱이 되도록 하려 한다. 이러한 x 중 두 번째로 작은 수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 12

해설

$$48 = 2^4 \times 3 \text{ 이므로}$$

가장 작은 $x = 3$

$$\text{두 번째로 작은 수는 } 2^2 \times 3 = 12$$

24. 집합 $S = \{a, \{a\}, \{a, b\}, b, \{c\}, c, d\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것만 골라라.

$$\textcircled{㉠} \{a\} \subset S$$

$$\textcircled{㉡} \{b\} \in S$$

$$\textcircled{㉢} \{b, c, d\} \in S$$

$$\textcircled{㉣} c \in S, d \in S$$

$$\textcircled{㉤} \{c, d\} \subset S$$

$$\textcircled{㉥} S \subset \{a, b, c, d\}$$

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

▶ 정답 : ㉢

▶ 정답 : ㉤

해설

집합 S 는 집합 안에 또 다른 집합을 원소로 가진 집합이다. 따라서 집합 S 의 원소는

$\{a, \{a\}, \{a, b\}, b, \{c\}, c, d\}$ 가 된다.

㉠ $\{a\} \subset S \rightarrow \{a\}$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.

㉡ $\{b\} \in S \rightarrow b$ 는 집합 S 의 원소이지만 $\{b\}$ 는 집합 S 의 원소가 아니다.

㉢ $\{b, c, d\} \in S \rightarrow b, c, d$ 는 모두 집합 S 의 원소이므로 $\{b, c, d\} \subset S$ 가 되어야 한다.

㉣ $c \in S, d \in S \rightarrow c, d$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.

㉤ $\{c, d\} \subset S \rightarrow c, d$ 는 집합 S 의 원소이고 $\{c, d\}$ 는 집합 S 의 부분집합이 되므로 옳다.

㉥ $S \subset \{a, b, c, d\} \rightarrow$ 집합 S 는 $\{a, b, c, d\}$ 의 부분집합이 될 수 없다.

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉣, ㉤이다.

해설

■, ■□, ■□□, ■■■, ■□■■, ■□□□, ■□■■□를 이진법의 수로 나타내면,

$1_{(2)}, 10_{(2)}, 100_{(2)}, 111_{(2)}, 1011_{(2)}, 10000_{(2)}, 10110_{(2)}$ 이고, 다시 십진법의 수로 바꾸어 나타내면, 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22 이므로,

두 수의 차가 1, 2, 3, 4, 5, 6 으로 점점 커지는 것을 알 수 있다.

(1) A, B 에 들어가는 그림을 십진수로 나타내면, 29, 37 이고 이를 이진수로 바꾸면 $11101_{(2)}, 100101_{(2)}$ 이므로 그림은, ■■■□■, ■□□■■■이다.

(2) 15 번째 수는 106 이고 이진수로는 $1101010_{(2)}$ 이므로, ■■□■■□■이다.

25. 다음 그림을 보고 물음에 답하여라.

■, ■□, ■□□, ■■■, ■□■■, ■□□□, ■□■■□,

A, B

(1) 규칙을 찾아 A 와 B 에 각각 그림을 그려 넣어라.

(2) 위의 규칙으로 계속 그림을 나열했을 때, 15 번째에 들어갈 그림을 그려라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ■■■□■

▷ 정답: ■□□■■■

▷ 정답: ■■□■■□■