

단원 종합 평가

1. y 가 x 의 제곱에 비례하고, $x = -2$ 일 때 $y = -12$ 이다. y 를 x 에 관한 식으로 바르게 나타낸 것은?

[배점 3, 하상]

- ① $y = 6x^2$ ② $y = 3x^2$ ③ $y = 2x^2$
 ④ $y = -3x^2$ ⑤ $y = -6x^2$

해설

$y = ax^2 (a \neq 0)$ 에 $(-2, -12)$ 를 대입하면, $-12 = a \times (-2)^2$, $a = -3$
 $\therefore y = -3x^2$

2. 이차함수 $y = \frac{1}{3}x^2$ 의 그래프를 x 축으로 p 만큼 평행이동하면 $y = \frac{1}{3}(x-5)^2$ 일 때, p 의 값은?

[배점 3, 하상]

- ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$y = (x-a)^2 + b$ 는 $y = x^2$ 을 x 축으로 a , y 축으로 b 만큼 평행이동한 것이므로
 $y = \frac{1}{3}(x-5)^2$ 은 $y = \frac{1}{3}x^2$ 을 x 축으로 5 만큼 평행이동한 것이다.
 $\therefore p = 5$

3. 다음 이차함수 중 그래프가 모든 사분면을 지나는 것을 모두 골라라.

- ㉠ $y = -\frac{1}{2}x^2$
 ㉡ $y = -4x^2 + 8x$
 ㉢ $y = -2x^2 + 4$
 ㉤ $y = -x^2 - 2x - 2$
 ㉥ $y = -5x^2 - 4x + 1$

[배점 3, 하상]

▶ 답 :

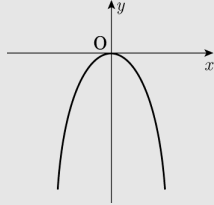
▶ 답 :

▶ 정답 : ㉢

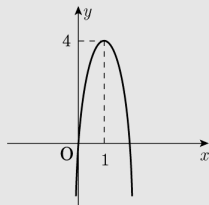
▶ 정답 : ㉥

해설

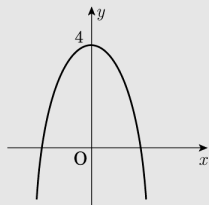
㉠ $y = -\frac{1}{2}x^2$: 꼭짓점이 (0, 0) 이고, y 절편은 0 인 위로 볼록한 그래프로, 제3, 4 사분면을 지난다.



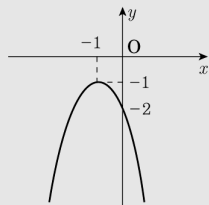
㉡ $y = -4x^2 + 8x = -4(x-1)^2 + 4$: 꼭짓점이 (1, 4) 이고, y 절편은 0 인 위로 볼록한 그래프로, 제1, 3, 4 사분면을 지난다.



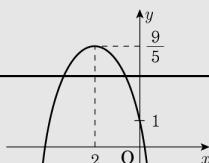
㉢ $y = -2x^2 + 4$: 꼭짓점이 (0, 4) 이고, y 절편은 4 인 위로 볼록한 그래프로, 제1, 2, 3, 4 사분면을 지난다.



㉤ $y = -x^2 - 2x - 2 = -(x+1)^2 - 1$: 꼭짓점이 (-1, -1) 이고, y 절편은 -2 인 위로 볼록한 그래프로, 제3, 4 사분면을 지난다.



㉥ $y = -5x^2 - 4x + 1 = -5(x + \frac{2}{5})^2 + \frac{9}{5}$: 꼭짓점이 $(-\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$ 이고, y 절편은 1 인 위로 볼록한 그래프로, 제1, 2, 3, 4 사분면을 지난다.



4. 이차함수 $y = 5x^2 + ax + 8$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = 1$ 일 때, 꼭짓점의 y 좌표를 구하면?

[배점 3, 하상]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = 5x^2 + ax + 8$ 의 축이 $x = 1$ 이므로

$$y = 5(x-1)^2 + q$$

$$y = 5x^2 + ax + 8$$

$$= 5(x-1)^2 + q$$

$$= 5x^2 - 10x + 5 + q$$

$$5 + q = 8, q = 3 \text{ 이다.}$$

따라서 식 $y = 5(x-1)^2 + 3$ 의 꼭짓점은 (1, 3) 이다.

5. 이차함수 $y = -2(x+1)^2 + 4$ 의 그래프를 x 축, y 축의 방향으로 각각 2, -5 만큼 평행이동한 그래프가 점 $(a, -9)$ 를 지날 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$y = -2(x+1)^2 + 4$ 의 그래프를 x 축, y 축의 방향으로 각각 2, -5 만큼 평행이동하면

$$y = -2(x+1-2)^2 + 4-5, y = -2(x-1)^2 - 1$$

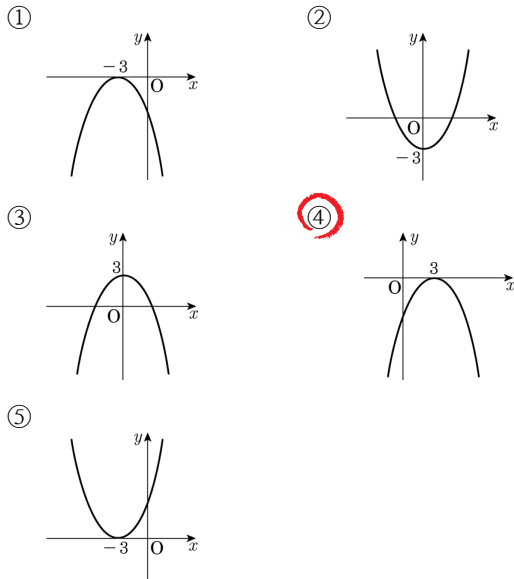
이고 점 $(a, -9)$ 를 지나므로 대입하면

$$-9 = -2(a-1)^2 - 1, 4 = (a-1)^2, a-1 = \pm 2$$

이다. $a > 0$ 이므로 $a = 3$ 이다.

6. 다음 중 $y = -\frac{2}{3}(x-3)^2$ 의 그래프는?

[배점 3, 중하]

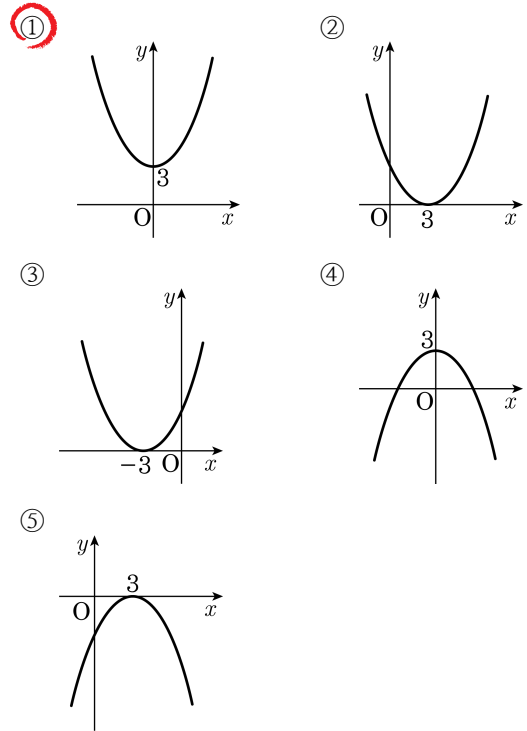


해설

x^2 의 계수 $-\frac{2}{3}$ 는 음수이므로 위로 볼록, 꼭짓점의 좌표는 (3, 0) 이다.

7. 다음 중 이차함수 $y = x^2 + 3$ 의 그래프라 할 수 있는 것은?

[배점 3, 중하]



해설

x^2 의 계수가 양수이므로 아래로 볼록한 형태이고, y 축으로 3만큼 평행이동 하였기때문에 꼭짓점이 x 축 위에 존재한다.

8. 이차함수 $y = -x^2 + 4$ 의 그래프에서 꼭짓점의 좌표와 축으로 옳은 것은?

[배점 3, 중하]

- ① (0, 4), $x = 4$ ② (0, -4), $x = -4$
- ③ (0, 4), $x = 0$ ④ (4, 0), $x = 4$
- ⑤ (4, 0), $x = 0$

해설

꼭짓점의 좌표는 $(0, 4)$ 이고, 축은 $x = 0$ 이다.

9. 이차함수 $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하는 x 의 값의 범위를 구하여라. [배점 3, 중하]

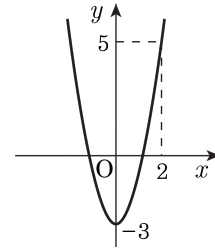
▶ 답 :

▶ 정답 : $x > -\frac{1}{2}$

해설

축의 방정식이 $x = -\frac{1}{2}$ 이고, 위로 볼록하므로 $x > -\frac{1}{2}$ 일 때, x 의 값이 증가하면, y 의 값은 감소한다.

10. 이차함수 $y = ax^2 - 3$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 이 그래프 위의 점이 아닌 것은? (단, a 는 상수)



[배점 4, 중중]

- ① $(1, -1)$ ② $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$
 ③ $(-1, -1)$ ④ $(-2, 5)$
 ⑤ $(-\frac{1}{3}, -\frac{35}{3})$

해설

점 $(2, 5)$ 를 지나므로 $x = 2, y = 5$ 를 대입하면 $5 = 4a - 3, 4a = 8, a = 2 \therefore y = 2x^2 - 3$

⑤ $x = -\frac{1}{3}$ 일 때, 함숫값 $y = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 = -\frac{25}{3}$ 이다.

따라서 점 $(-\frac{1}{3}, -\frac{25}{3})$ 를 지난다.

11. 다음 중 주어진 조건을 모두 만족하는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식은?

보기

- ㄱ. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 폭이 같다.
 ㄴ. 꼭짓점은 제 4 사분면 위에 있다.
 ㄷ. 아래로 볼록하다.
 ㄹ. y 절편이 양수이다.

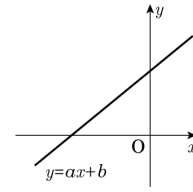
[배점 4, 중중]

- ① $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$
 ② $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 + 1$
 ③ $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 3$
 ④ $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$
 ⑤ $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 - 3$

해설

- ㄱ에서 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 폭이 같은 것은 이차항의 계수가 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 이다.
 ㄴ. 꼭짓점의 x 좌표가 양수, y 좌표가 음수이다.
 ㄷ. 아래로 볼록하므로 이차항의 계수가 양수이다.
 ㄹ. y 절편이 양수이다.
 이 조건을 만족하는 이차함수식은 ①이다.

12. 다음 그림은 $y = ax + b$ 의 그래프이다. 이 때, 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프의 모양은?



[배점 4, 중중]

- ① ②
 ③ ④
 ⑤

해설

- 일차함수 $y = ax + b$ 의 기울기는 양수이고, y 절편도 양수이므로 $a > 0, b > 0$ 이다.
 따라서 $y = ax^2 + b$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 y 절편이 양수인 그래프이다.

13. 이차함수 $y = 2x^2 - 4x + 3$ 과 $y = x^2 + ax + b$ 의 꼭짓점의 좌표가 일치할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.
 [배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$$\begin{aligned}
 y &= 2x^2 - 4 + 3 \\
 &= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3 \\
 &= 2(x - 1)^2 - 2 + 3 \\
 &= 2(x - 1)^2 + 1 \\
 \text{꼭짓점의 좌표: } (1, 1) \\
 \text{꼭짓점의 좌표가 일치하므로} \\
 y &= x^2 + ax + b = (x - 1)^2 + 1 \\
 &= x^2 - 2x + 2 \\
 \therefore a &= -2, b = 2, a + b = 0
 \end{aligned}$$

14. 다음 보기 중에서 y 가 x 에 관한 이차함수인 것을 모두 고르면?

보기

$$\begin{aligned}
 \text{㉠. } y &= 2x(x - 1) \\
 \text{㉡. } y &= \frac{x}{3} - 4 \\
 \text{㉢. } y &= -3x^2 + 7 \\
 \text{㉣. } y &= 2x^3 + x^2 - 5 \\
 \text{㉤. } y &= \frac{5}{x^2} \\
 \text{㉥. } y &= \frac{x^2 + 2}{3}
 \end{aligned}$$

[배점 4, 중중]

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢, ㉥
 ③ ㉡, ㉣, ㉤ ④ ㉢, ㉣, ㉥
 ⑤ ㉠, ㉣, ㉤, ㉥

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에서 $a \neq 0$ 이면 이차함수 이차함수인 것은 ② ㉠, ㉢, ㉥이다.

15. 이차함수 $y = 2x^2 + mx + n$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하였더니 꼭짓점이 $(-2, -6)$ 이었다. $2m - n$ 의 값을 구하여라.
 [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : -6

해설

$$\begin{aligned}
 \text{평행이동시킨 그래프의 식이 } y &= 2(x + 2)^2 - 6 \\
 \text{이므로 처음 식은} \\
 y &= 2(x + 2 + 3)^2 - 6 + 2 \\
 &= 2(x + 5)^2 - 4 \\
 &= 2x^2 + 20x + 46 \\
 \therefore m &= 20, n = 46, 2m - n = 40 - 46 = -6
 \end{aligned}$$

16. 이차함수 $y = -2x^2 + 2ax$ 의 최댓값이 8일 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a > 0$) [배점 4, 중중]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}
 y &= -2x^2 + 2ax \\
 &= -2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \\
 \text{최댓값이 8 이므로 } \frac{a^2}{2} &= 8 \text{ 이다.} \\
 a > 0 \text{ 이므로 } a &= 4 \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

17. 이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 (2, 0) 이 되도록 평행이동하면 점 (k, 6) 을 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : -1

해설

이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 (2, 0) 이 되도록 평행이동하면 $y = \frac{2}{3}(x-2)^2$ 이다. 점 (k, 6) 을 지나므로 대입하면 $6 = \frac{2}{3}(k-2)^2$, $9 = (k-2)^2$, $k-2 = \pm 3$ 따라서 $k = 5, -1$ 이다.

18. 다음의 이차함수의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{aligned} \text{(가)} & y = \frac{1}{2}x^2 \\ \text{(나)} & y = -2x^2 \\ \text{(다)} & y = 2x^2 \\ \text{(라)} & y = -\frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

[배점 5, 중상]

- ① (나)와 (다)의 그래프는 폭이 같다.
- ② 아래로 볼록한 포물선은 (가)와 (다)이다.
- ③ 폭이 가장 넓은 그래프는 (라)이다.
- ④ (나)와 (다)의 그래프는 x 축에 대하여 서로 대칭이다.
- ⑤ x 축 아래쪽에 나타나지 않는 그래프는 (나), (라)이다.

해설

- ① $|a|$ 이 같으므로 두 그래프는 폭이 같다.
- ② $a > 0$ 이므로 아래로 볼록이다.
- ③ $|a|$ 가 작을 수록 폭이 넓다.
- ④ a 의 부호가 반대이면 x 축 대칭이다.
- ⑤ (나)는 $a < 0$ 이므로 x 축 아래에 나타난다.

19. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 조건을 만족할 때, 상수 b 의 값을 구하여라.

(가) 상수 m, n 에 대하여 $m - n = 6$ 이다.
(나) 두 점 (1, m) 과 (-1, n) 을 지난다.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 점 $(1, m)$ 과 $(-1, n)$ 을 함수식에 대입하면
 $m = a + b + c$, $n = a - b + c$
 두 식을 연립하여 풀면 $m - n = 2b$, $m - n = 6$
 이므로 $2b = 6 \therefore b = 3$

20. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 의 꼭짓점이 x 축 위에 있을 때, $\frac{a^2}{b}$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

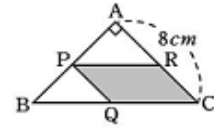
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = x^2 - ax + b = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$,
 꼭짓점 $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b\right)$ 가 x 축 위에 있으므로
 $-\frac{a^2}{4} + b = 0$, $b = \frac{a^2}{4}$,
 $\frac{a^2}{b} = a^2 \times \frac{1}{b} = a^2 \times \frac{4}{a^2} = 4$

21. 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC 의 $\overline{AB}$ 위에 점 P 를 잡고, 점 P 에서 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 와 평행한 직선을 그어 $\overline{BC}, \overline{AC}$ 와 만나는 점을 각각 Q, R 라 한다. $\square PQCR$ 의 넓이가 최대가 될 때, $\overline{BP}$ 의 길이를 구하면?



[배점 5, 중상]

- ① 1cm ② 2cm ③ 3cm
 ④ 4cm ⑤ 5cm

해설

$\overline{BP} = x$ 라 놓으면
 $\square PQCR = \triangle ABC - (\triangle APR + \triangle PBQ)$
 $= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 - \left\{ \frac{1}{2} \times (8-x)^2 + \frac{1}{2} x^2 \right\} = 32 - (x^2 - 8x + 32) = -x^2 + 8x = -(x-4)^2 + 16$
 따라서 $\overline{BP} = 4\text{cm}$ 일 때, $\square PQCR$ 의 넓이가 최대가 된다.

22. 이차함수 $y = 3x^2 - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 y 축의 방향으로 -8 만큼 평행이동한 포물선 위의 세 점 A $(0, a)$, B $(3, b)$, C $(5, 18)$ 을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 넓이를 구하여라.

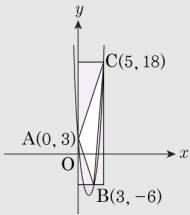
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

$$y = 3(x-2)^2 - 1 - 8 = 3(x-2)^2 - 9$$



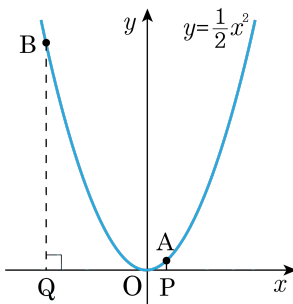
$$f(0) = 3, A(0, 3)$$

$$f(3) = -6, B(3, -6)$$

$\triangle ABC$ 의 넓이는 사각형의 넓이에서 색칠한 부분의 넓이를 뺀 것과 같다.

$$\begin{aligned} 5 \times 24 - \frac{1}{2}(5 \times 15 + 3 \times 9 + 2 \times 24) \\ = 120 - 75 = 45 \end{aligned}$$

23. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프 위의 두 점 A, B에 대하여 A의 좌표는 (4, 8)이고, B의 x좌표는 음수이다. 점 A, B에서 각각 x축에 수선 $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ 를 그으면 $\overline{AP} : \overline{BQ} = 4 : 25$ 가 된다. 이 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 14

해설

$\overline{AP} : \overline{BQ} = 4 : 25$ 에서 점 A의 y좌표는

$$4 : 25 = 8 : y$$

$\therefore y = 50$ 따라서, 점 B의 y좌표는 50이다.

$y = \frac{1}{2}x^2$ 에 $y = 50$ 을 대입하면 $50 = \frac{1}{2}x^2, x^2 = 100, x < 0$ 이므로 $x = -10$ 이 되고 점 B의 x좌표는 -10이다.

따라서, $\overline{QO} = 10, \overline{PO} = 4$ 이므로 $\overline{PQ} = 14$ 이다.

24. 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프가 점 (1, 0)을 지나고, 이 그래프와 y축에 대하여 대칭인 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (-3, -5)일 때, apq 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

$$\triangleright \text{정답} : -\frac{75}{4}$$

해설

$y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼭짓점의 좌표는 (p, q)

y축 대칭하면 $(-p, q) = (-3, -5)$

$$\therefore p = 3, q = -5$$

$y = a(x-3)^2 - 5$ 의 그래프가 점 (1, 0)을 지나므로

$$0 = a(1-3)^2 - 5$$

$$\therefore a = \frac{5}{4}$$

$$\therefore apq = \frac{5}{4} \times 3 \times (-5) = -\frac{75}{4}$$

25. 두 변의 길이가 10 인 직각이등변삼각형에 내접하는 직사각형의 넓이가 최대일 때, 직사각형의 둘레의 길이를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 직사각형의 넓이를 y 라고 하자.

직사각형 부분을 제외하고 남은 세 삼각형은 모두 직각이등변삼각형이므로 직사각형의 가로 길이는 $(10 - x)$ 이다.

$\therefore y = x(10 - x) = -x^2 + 10x = -2(x - 5)^2 + 25$
따라서 직사각형의 세로의 길이가 5, 가로의 길이가 5 일 때, 넓이가 최대이므로
둘레의 길이는 $2(5 + 5) = 20$ 이다.