

단원 종합 평가

1. 다음 보기의 이차함수 중 그래프의 꼭짓점이 제 2 사분면에 있는 그래프를 모두 구하여라.

보기

- ㉠ $y = (x - 3)^2$
 ㉡ $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 2$
 ㉢ $-3x^2 + 1$
 ㉤ $y = x^2 + 2x + 3$
 ㉥ $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

[배점 3, 하상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉡

▶ 정답 : ㉤

▶ 정답 : ㉥

해설

꼭짓점을 각각 구하면

- ㉠ (3, 0)
 ㉡ (-1, 2)
 ㉢ (0, 1)
 ㉤ $y = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$ 이므로 (-1, 2)
 ㉥ $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 1$ 이므로 (-2, 1)
 따라서 제 2 사분면에 있는 그래프는 ㉡, ㉤, ㉥이다.

2. 이차함수 $y = 2x^2 - 12x + 10$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 두 개 고르면? [배점 3, 하상]

㉠ y 절편은 10 이다.

㉡ 치역은 $\{y \mid y \geq -18\}$ 이다.

㉢ x 축과 만나는 점의 좌표가 (1, 0), (5, 0) 이다.

㉣ 축의 방정식은 $y = 3$ 이다.

㉤ 그래프는 아래로 오목한 포물선이다.

해설

$$y = 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + 10 \\ = 2(x - 3)^2 - 8$$

㉡ 치역은 $\{y \mid y \geq -8\}$ 이다.

㉣ 축의 방정식은 $x = 3$ 이다.

㉤ 아래로 볼록한 그래프이다.

3. 다음 이차함수의 그래프에서 포물선의 폭이 가장 넓은 것부터 순서대로 나열한 것은?

가. $y = -\frac{1}{3}x^2$
 나. $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$
 다. $y = -2x^2 + x - 3$
 라. $y = (x - 1)^2 + 1$

[배점 3, 하상]

㉠ 다, 라, 나, 가

㉡ 가, 라, 나, 다

㉢ 다, 나, 가, 라

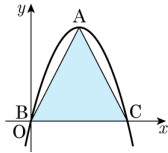
㉣ 가, 나, 라, 다

㉤ 가, 나, 다, 라

해설

x^2 의 계수의 절댓값이 작을수록 폭이 넓다.
따라서 폭이 넓은 순으로 나열하면 ④가, 나, 라,
다이다.

4. 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하면? (점 A는 꼭짓점)



[배점 3, 하상]

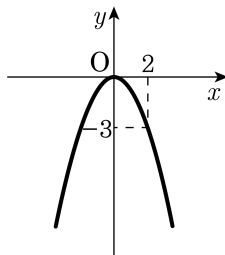
- ① 32 ② 16 ③ 8 ④ 4 ⑤ 2

해설

$y = -(x-2)^2 + 4$ 에서 A(2, 4)이므로 삼각형의 높이는 4이다. $y = x(x-4)$ 에서 B(0, 0), C(4, 0)이므로 $\overline{BC} = 4$
 $\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

5. 다음 그림의 포물선의 식은?

[배점 3, 중하]



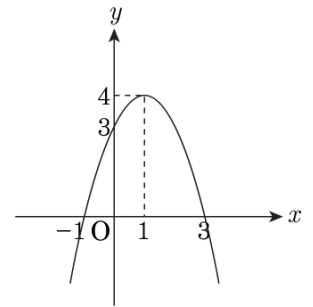
- ① $y = -\frac{2}{3}x^2$
② $y = \frac{3}{2}x^2$
③ $y = -\frac{3}{4}x^2$
④ $y = \frac{2}{3}x^2$
⑤ $y = -\frac{3}{2}x^2$

해설

꼭짓점이 원점이고, (2, -3)을 지나며 위로 볼록한 포물선은 $y = -\frac{3}{4}x^2$ 다.

6. 다음 그림은 이차함수의 그래프이다. 이 포물선의 방정식은 어느 것인가?

[배점 3, 중하]



- ① $y = -x^2 + 2x + 3$
② $y = x^2 + 2x + 1$
③ $y = x^2 - 3x + 2$
④ $y = -2x^2 + 3$
⑤ $y = -3x^2 + 2x - 1$

해설

꼭짓점의 좌표가 (1, 4)이므로
 $y = a(x-1)^2 + 4$ 이고, 점 (0, 3)을 지나므로
 $3 = a(0-1)^2 + 4 \quad \therefore a = -1$
 $\therefore y = -(x-1)^2 + 4$
 $= -x^2 + 2x + 3$

7. 다음 중 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ 의 치역은?

[배점 3, 중하]

- ① $\{y \mid y \geq 2\}$ ② $\{y \mid y \leq 2\}$
③ $\{y \mid y \geq -8\}$ ④ $\{y \mid y \leq -8\}$
⑤ $\{y \mid y \geq 0\}$

해설

정의역은 모든 실수이나, 실수의 제곱은 항상 0또는 양수이기 때문에 이 그래프의 치역은 $\{y \mid y \geq 2\}$ 이다.

8. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 3$ 이 $x = -3$ 에서 최솟값 m 을 가질 때, $a - m$ 의 값은? [배점 3, 중하]

① -9 ② 6 ③ 3 ④ -3 ⑤ -6

해설

$$y = x^2 - 2ax + 3 = (x - a)^2 - a^2 + 3$$

$x = -3$ 에서 최솟값 m 을 가지므로

$$a = -3, -a^2 + 3 = m, m = -6$$

$$\therefore a - m = -3 - (-6) = 3$$

9. 이차함수 $y = x^2 + 2ax - b$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 2 를 갖는다. 이때, $a + b$ 를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : -14

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2ax - b \\ &= (x - 3)^2 + 2 \\ &= x^2 - 6x + 11 \end{aligned}$$

$$2a = -6$$

$$\therefore a = -3$$

$$-b = 11$$

$$\therefore b = -11$$

$$\therefore a + b = -3 + (-11) = -14$$

10. 이차함수 $y = (x - 3)^2 - 6$ 의 그래프를 x 축의 음의 방향으로 4 만큼, y 축의 양의 방향으로 8 만큼 평행이동한 포물선의 식은? [배점 4, 중중]

① $y = (x + 4)^2$

② $y = x^2 + 8$

③ $y = (x + 1)^2 - 2$

④ $y = (x + 1)^2 + 2$

⑤ $y = (x - 1)^2 + 2$

해설

$$\begin{aligned} y &= (x - 3 + 4)^2 - 6 + 8 \\ &= (x + 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

11. 이차함수 $y = -\frac{2}{3}(x+2)^2 - 3$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 짝지은 것이 옳은 것은?
[배점 4, 중중]

- ① 꼭짓점의 좌표 : (1, 4) , 축의 방정식 : $x = 1$
 ② 꼭짓점의 좌표 : (2, -1) , 축의 방정식 : $x = 2$
 ③ 꼭짓점의 좌표 : (-1, -3) , 축의 방정식 : $x = -1$
 ④ 꼭짓점의 좌표 : (-1, 4) , 축의 방정식 : $x = -1$
 ⑤ 꼭짓점의 좌표 : (-2, -3) , 축의 방정식 : $x = -2$

해설

이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼭짓점의 좌표는 (p, q) , 축의 방정식은 $x = p$ 이다.

$y = -\frac{2}{3}(x+2)^2 - 3$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, -3)$, 축의 방정식은 $x = -2$ 이다.

12. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 $x = 3$ 에서 최솟값 -10 을 가질 때 a, b 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : $a = -3$

해설

$x = 3$ 일 때, 최솟값 -10 을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(3, -10)$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2ax + b \\ &= (x-3)^2 - 10 \\ &= x^2 - 6x - 1 \quad \therefore a = -3, b = -1 \end{aligned}$$

13. 다음 보기의 이차함수 그래프 중 이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프와 폭이 같은 것을 모두 골라라.

보기

- ㉠ $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$
 ㉡ $y = 2x^2 - x$
 ㉢ $y = -(2+x)(2-x) + 3$
 ㉣ $y = -x^2 - 4x + 1$
 ㉤ $y = x^2 - 2x - 2(1+x^2)$
 ㉥ $y = -(1-x)^2$

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉢

▶ 정답 : ㉣

▶ 정답 : ㉤

▶ 정답 : ㉥

해설

a 의 절댓값이 같으면 폭이 같다. 따라서 각각의 절댓값을 구하면 ㉠ $\frac{1}{3}$ ㉡ 2 ㉢ 1 ㉣ 1 ㉤ 1 ㉥ 1
따라서 폭이 같은 것은 ㉢, ㉣, ㉤, ㉥이다.

14. 이차함수 $y = 2x^2 + ax + b$ 가 $x = 1$ 에서 최솟값 -2 를 가질 때, $a-b$ 의 값을 구하면? [배점 4, 중중]

- ① 0 ② -2 ③ -4 ④ -3 ⑤ 6

해설

$x = 1$ 에서 최솟값이 -2 이므로
꼭짓점의 좌표가 $(1, -2)$ 이다.
 $y = 2x^2 + ax + b = 2(x - 1)^2 - 2 = 2x^2 - 4x$
 $a = -4, b = 0$
 $\therefore a - b = -4 - 0 = -4$

15. 이차함수 $y = -x^2 + 6x + m$ 의 그래프가 제2 사분면을 제외한 모든 사분면을 지나도록 하는 m 의 값의 범위는? [배점 4, 중중]

- ① $m > -9$ ② $-9 < m \leq 0$
③ $m \geq 0$ ④ $0 \leq m < 9$
⑤ $m > 9$

해설

$y = -(x - 3)^2 + m + 9$
꼭짓점이 제1 사분면에 있고, y 절편이 음수여야 하므로
 $m \leq 0$
 $m + 9 > 0$
 $\therefore -9 < m \leq 0$

16. 다음 이차함수의 그래프 중 $y = 3x^2$ 의 그래프를 평행이동하여 완전히 포괄 수 있는 것을 모두 고르면? [배점 4, 중중]

- ① $y = 3x^2 + 1$
② $y = -3x^2 + 4$
③ $y = \frac{9x^2 - 1}{3}$
④ $y = -3(x + 1)^2$
⑤ $y = x^2 - 5x + 2 + 2(x - 1)(x + 1)$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프에서 a 의 값이 같으면 평행이동하여 두 이차함수의 그래프를 완전히 포괄 수 있다.
따라서 $a = 3$ 인 것은 ①, ③, ⑤이다.

17. 이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(2, 0)$ 이 되도록 평행이동하면 점 $(k, 6)$ 을 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 5

▷ 정답: -1

해설

이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(2, 0)$ 이 되도록 평행이동하면 $y = \frac{2}{3}(x-2)^2$ 이다. 점 $(k, 6)$ 을 지나므로 대입하면 $6 = \frac{2}{3}(k-2)^2$, $9 = (k-2)^2$, $k-2 = \pm 3$ 따라서 $k = 5, -1$ 이다.

해설

$y = ax^2$ 에 $(4, 8), (b, \frac{9}{2})$ 을 대입하면 $a = \frac{1}{2}, b = -3$ 이다.
이 이차함수와 x 축 대칭인 이차함수는 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 이고 $(-3, c)$ 를 지나므로
 $\therefore c = -\frac{9}{2}$

18. 두 함수 $(a^2 - 3a + 2)y^2 + 2y - 4x^2 - 1 = 0$ 과 $y = (2a^2 - 8)x^2 - 3x + 1$ 이 모두 y 가 x 에 관한 이차함수가 되도록 상수 a 의 값을 정하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

해설

i) $(a^2 - 3a + 2)y^2 + 2y - 4x^2 - 1 = 0$ 이 x 에 관한 이차함수가 되기 위해서는 $a^2 - 3a + 2 = 0$ 이어야 하므로 $(a-1)(a-2) = 0 \therefore a = 1$ 또는 $a = 2$
ii) $y = (2a^2 - 8)x^2 - 3x + 1$ 이 x 에 관한 이차함수가 되기 위해서는 $2a^2 - 8 \neq 0$ 이어야 하므로 $a \neq \pm 2$
i), ii) 에 의하여 $a = 1$ 이다.

20. 이차함수 $y = -\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 a 만큼 평행이동하면 점 $(-\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ 을 지난다고 할 때, a 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

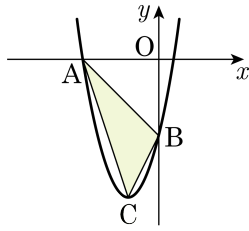
해설

$y = -\frac{1}{4}x^2 + a$ 에 점 $(-\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ 을 대입하면
 $\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(-\sqrt{2})^2 + a$
 $\therefore a = 1$

19. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프가 두 점 $(4, 8), (b, \frac{9}{2})$ 를 지난다. 이 함수와 x 축 대칭인 이차함수가 (b, c) 를 지날 때, c 의 값은?(단, $b < 0$) [배점 5, 중상]

- ① -2 ② $-\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{9}{2}$

21. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 A, y 축과 만나는 점을 B, 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



[배점 5, 중상]

- ① 2 ② 3 ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

점 A 는 x 축과 만나는 점이므로 $y = 0$ 일 때 x 값을 구한다.

$$0 = (x+1)^2 - 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4$$

$$x+1 = \pm 2, x = 1, -3$$

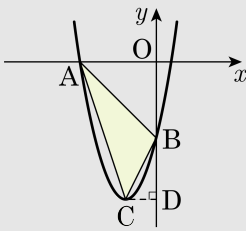
A 의 x 좌표는 음수이다.

$$\therefore A(-3, 0)$$

점 B 는 y 절편, 즉 $x = 0$ 일 때 y 값을 구한다.

점 C 는 꼭짓점의 좌표이므로 $y = (x+1)^2 - 4$ 에서 $C(-1, -4)$ 이다.

$$\therefore B(0, -3)$$



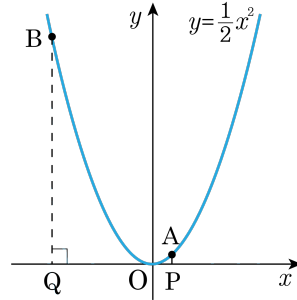
$\triangle ABC$ 의 넓이는 사다리꼴 OACD 에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle BCD$ 의 넓이를 뺀 것과 같다.

$\triangle ABC$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (3+1) \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right\}$$

$$\therefore \triangle ABC = 3$$

22. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프 위의 두 점 A, B에 대하여 A 의 좌표는 (4, 8) 이고, B 의 x 좌표는 음수이다. 점 A, B에서 각각 x 축에 수선 $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ 를 그으면 $\overline{AP} : \overline{BQ} = 4 : 25$ 가 된다. 이 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 14

해설

$\overline{AP} : \overline{BQ} = 4 : 25$ 에서 점 A 의 y 좌표는

$$4 : 25 = 8 : y$$

$\therefore y = 50$ 따라서, 점 B 의 y 좌표는 50 이다.

$y = \frac{1}{2}x^2$ 에 $y = 50$ 을 대입하면 $50 = \frac{1}{2}x^2, x^2 = 100, x < 0$ 이므로 $x = -10$ 이 되고 점 B 의 x 좌표는 -10 이다.

따라서, $\overline{QO} = 10, \overline{PO} = 4$ 이므로 $\overline{PQ} = 14$ 이다.

23. 이차함수 $y = 3x^2 - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 y 축의 방향으로 -8 만큼 평행이동한 포물선 위의 세 점 A(0, a), B(3, b), C(5, 18) 을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 넓이를 구하여라.

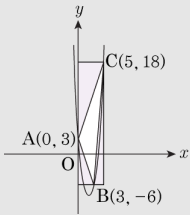
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 45

해설

$$y = 3(x-2)^2 - 1 - 8 = 3(x-2)^2 - 9$$



$$f(0) = 3, A(0, 3)$$

$$f(3) = -6, B(3, -6)$$

△ABC의 넓이는 사각형의 넓이에서 색칠한 부분의 넓이를 뺀 것과 같다.

$$\begin{aligned} 5 \times 24 - \frac{1}{2}(5 \times 15 + 3 \times 9 + 2 \times 24) \\ = 120 - 75 = 45 \end{aligned}$$

24. 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 16$ 사이에 둘러싸인 도형 내부의 좌표 중, x, y 좌표의 값이 모두 정수인 점의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 163 개

해설

$y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 16$ 이 만나는 두 점은 각각 $(-8, 16), (8, 16)$

둘러싸인 부분의 x 좌표의 범위는 $-8 \leq x \leq 8$ 이므로 이 범위 안의 정수는 $-8, -7, \dots, 7, 8$ 의 17개가 있다. 따라서

x 좌표가 -8 일 때 : 1 개

x 좌표가 -7 일 때 :

y 좌표는 13 부터 16 까지이므로 4 개

x 좌표가 -6 일 때 :

y 좌표는 9 부터 16 까지이므로 8 개

x 좌표가 -5 일 때 :

y 좌표는 7 부터 16 까지이므로 10 개

x 좌표가 -4 일 때 :

y 좌표는 4 부터 16 까지이므로 13 개

x 좌표가 -3 일 때 :

y 좌표는 3 부터 16 까지이므로 14 개

x 좌표가 -2 일 때 :

y 좌표는 1 부터 16 까지이므로 16 개

x 좌표가 -1 일 때 :

y 좌표는 1 부터 16 까지이므로 16 개

x 좌표가 0 일 때 : 1 개

$$\therefore 2 \times (4 + 8 + 10 + 13 + 14 + 16 + 16) + 1 = 163 \text{ (개)}$$

25. 이차함수 $f(x) = x^2 - 1$ 에 대하여 $f^1(x) = f(x), f^{n+1} = f(f^n(x))$ 라 할 때, $f^{2009}(-1)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f^1(-1) = 0$$

$$f^2(-1) = f(f'(-1)) = f(0) = -1$$

$$f^3(-1) = f(f^2(-1)) = f(-1) = 0$$

$$f^4(-1) = f(f^3(-1)) = f(0) = -1$$

$\vdots$

$$\therefore f^{2009}(-1) = 0$$