

단원 종합 평가

1. 두 집합 $A = \{4, 7, 9\}$, $B = \{x-2, x+1, x+3\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, x 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 는 $A = B$ 이다. 두 집합 A, B 의 모든 원소가 같아야 한다.
두 집합의 원소를 비교하면 $x-2$ 가 가장 작은 수이기 때문에 $x-2 = 4$ 이다.
따라서 $x = 6$ 이다.

2. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$$\{1, 9\} \subset X \subset A$$

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8개

해설

X 는 원소 1과 9를 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 X 의 개수는 $2 \times 2 \times 2 = 8(\text{개})$ 이다.

3. 명희네 반 학생 중에서 영어를 좋아하는 학생은 28명, 수학을 좋아하는 학생은 23명이다. 영어 또는 수학을 좋아하는 학생이 41명일 때, 수학만 좋아하는 학생은 몇 명인지 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 13명

해설

영어를 좋아하는 학생들의 집합을 A , 수학을 좋아하는 학생들의 집합을 B 라고 하면,

$$n(A) = 28, n(B) = 23$$

$$n(A \cup B) = 41$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 28 + 23 - 41 = 10$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 23 - 10 = 13$$

4. 600을 자연수 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 나누어야 할 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

600 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)600} \\ 2 \overline{)300} \\ 2 \overline{)150} \\ 3 \overline{)75} \\ 5 \overline{)25} \\ 5 \end{array}$$

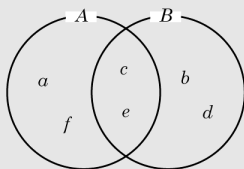
$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ 이므로 $\frac{2^3 \times 3 \times 5^2}{x}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 x 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 $2 \times 3 = 6$ 이다.

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $B = \{b, c, d, e\}$, $A \cap B = \{c, e\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$ 일 때, 집합 A 는 ?
[배점 4, 중중]

- ① $\{a, c, e\}$ ② $\{a, c, f\}$
③ $\{a, c, e, f\}$ ④ $\{a, b, c, f\}$
⑤ $\{a, b, e, f\}$

해설

$B = \{b, c, d, e\}$, $A \cap B = \{c, e\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$ 이므로 벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.



그러므로 집합 A 는 $\{a, c, e, f\}$ 가 된다.

6. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{ 이하의 자연수}\}$ 일 때, 다음 중 집합 A 가 될 수 없는 것은?

[배점 4, 중중]

- ① $\{1, 2, 6\}$
② $\{x \mid x \text{는 } 12 \text{보다 작은 } 6 \text{의 배수}\}$
③ $\{3, 6\}$
④ $\{x \mid x \text{는 } 4 < x < 7 \text{인 자연수}\}$
⑤ $\{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$

해설

집합 $B = \{1, 2, 3\}$ 이고, $A \cup B = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로 $6 \in A$

집합 A 는 원소 6을 반드시 포함하는 $A \cup B$ 의 부분집합이다.

④ $\{x \mid x \text{는 } 4 < x < 7 \text{인 자연수}\} = \{5, 6\} \not\subset \{1, 2, 3, 6\}$

7. 세 자연수의 비가 $2 : 3 : 8$ 이고 최소공배수가 144 일 때, 세 자연수를 구하여라.
[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 12

▷ 정답: 18

▷ 정답: 48

해설

세 자연수의 비가 $2 : 3 : 8$ 이므로 세 자연수는 각각 $2 \times a$, $3 \times a$, $8 \times a$ 로 나타낼 수 있다.
 또한 최소공배수는 $2^3 \times 3 \times a = 144 = 2^4 \times 3^2$ 으로 나타낼 수 있으므로 $a = 2 \times 3 = 6$ 이다.
 따라서 세 자연수는 각각 $12 = 2 \times 6$, $18 = 3 \times 6$, $48 = 8 \times 6$ 이다.

8. 가로 길이가 1200cm, 세로 길이가 $2^3 \times 3^2 \times 5$ cm 인 벽면이 있다. 이 벽면에 가능한 한 큰 정사각형의 타일을 붙이려고 한다. 정사각형의 타일은 몇 개 필요한지 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 30 개

해설

$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$, $2^3 \times 3^2 \times 5$ 의 최대공약수는 $2^3 \times 3 \times 5 = 120$
 따라서 정사각형의 타일의 한 변의 길이가 120cm 이므로 필요한 타일의 개수는
 $(1200 \div 120) \times (360 \div 120) = 10 \times 3 = 30$ (개) 이다.

9. 굴 60 개, 배 45 개, 감 30 개를 하나도 빠짐없이 되도록 많은 사람들에게 똑같이 나누어주려고 한다. 몇 사람에게 나누어주면 되는지 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 15 명

해설

구하고자 하는 학생 수는 60, 45, 30 의 최대공약수이므로 15 (명) 이다.

10. 지윤이네 학교 학생 170 명 중 A 문제를 푼 학생이 80 명, B 문제를 푼 학생이 90 명, A 문제와 B 문제를 모두 푼 학생이 15 명일 때, A 문제와 B 문제 중 어느 것도 풀지 못한 학생은 몇 명인가? [배점 5, 중상]

- ① 10 명 ② 12 명 ③ 14 명
 ④ 15 명 ⑤ 16 명

해설

전체집합을 U , A 문제를 푼 학생들의 집합을 A , B 문제를 푼 학생들의 집합을 B 라고 하면
 $n(U) = 170$
 $n(A) = 80$, $n(B) = 90$, $n(A \cap B) = 15$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 80 + 90 - 15$
 $= 155$
 $n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$
 $= 170 - 155$
 $= 15$

11. 집합 $A = \{x \mid x < 20, x = 3n + 1 (n \text{은 자연수})\}$ 라고 할 때, 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 56 개

해설

$A = \{4, 7, 10, 13, 16, 19\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개) 이고, 이 중에서 홀수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 4, 10, 16 으로 만든 부분집합이므로 $2^3 = 8$ (개) 이다.
 $\therefore 64 - 8 = 56$ (개)

12. 다음 중 무한집합인 것을 모두 고르면? (정답 2 개)
 [배점 5, 중상]

- ① $A = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 100\}$
 ② $B = \{x \mid x \text{ 는 1 보다 작은 분수}\}$
 ③ $C = \{x \mid x \text{ 는 3 의 배수인 짝수}\}$
 ④ $D = \{x \mid x \text{ 는 } 2 \times n, n \text{ 은 10 보다 작은 자연수}\}$
 ⑤ $E = \left\{x \mid x \text{ 는 } \frac{100}{x} \text{ 을 자연수로 만드는 자연수}\right\}$

해설

- ① $A = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 100\}$ 이므로 유한 집합이다.
 ② $B = \{x \mid x \text{ 는 1 보다 작은 분수}\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ 이므로 무한집합이다.
 ③ $C = \{x \mid x \text{ 는 3 의 배수인 짝수}\} = \{6, 12, \dots\}$ 이므로 무한집합이다.
 ④ $D = \{x \mid x \text{ 는 } 2 \times n, n \text{ 은 10 보다 작은 자연수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 18\}$ 이므로 유한집합이다.
 ⑤ $E = \left\{x \mid x \text{ 는 } \frac{100}{x} \text{ 을 자연수로 만드는 자연수}\right\} = \{1, 2, 4, 5, 20, 25, 50, 100\}$ 이므로 유한집합이다.

13. 다음 [보기] 에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $n(\{0\}) = 0$ ㉡ $\phi \subset \{\emptyset\}$
 ㉢ $4 \subset \{1, 2\}$ ㉣ $0 \subset \{0\}$
 ㉤ $0 \in \emptyset$ ㉥ $0 \notin \emptyset$
 ㉦ $A \subset (A \cup B)$ ㉧ $n(\emptyset) = 1$
 ㉨ $A \in (A \cap B)$

[배점 5, 중상]

- ① ㉡, ㉥, ㉦ ② ㉡, ㉥, ㉧ ③ ㉠, ㉡, ㉥
 ④ ㉢, ㉥, ㉨ ⑤ ㉥, ㉧, ㉨

해설

- ㉠ $n\{(0)\} = 1$
- ㉡ $4 \notin \{1, 2\}$
- ㉢ $0 \in \{0\}$
- ㉣ $0 \notin \emptyset$
- ㉤ $n(\emptyset) = 0$
- ㉥ $A \subset (A \cup B)$

14. $96a = b^3$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 a, b 를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 18$

▷ 정답 : $b = 12$

해설

$96a = 2^5 \times 3 \times a = b^3$
 지수가 3 의 배수가 되도록 작은 수를 곱해주어야 한다.
 $\therefore a = 2 \times 3^2 = 18$
 $2^6 \times 3^3 = (2^2 \times 3)^3 = 12^3$
 $\therefore b = 12$

15. 세 자연수의 비가 $3 : 5 : 9$ 이고, 최소공배수가 810 일 때, 세 자연수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 54

▷ 정답 : 90

▷ 정답 : 162

해설

세 자연수를 $3 \times x, 5 \times x, 9 \times x$ 라 하면

$$\begin{array}{r} x) \quad 3 \times x \quad 5 \times x \quad 9 \times x \\ 3) \quad \underline{3} \quad \underline{5} \quad \underline{9} \\ \quad \quad 1 \quad \quad 5 \quad \quad 3 \end{array}$$

$$x \times 3 \times 5 \times 3 = 810, \quad x = 18$$

따라서 세 자연수는 54, 90, 162 이다.

16. 집합 $A_N = \{x | x \text{ 는 } N \text{ 의 약수}\}$ 로 정의한다. A_N 의 진부분집합의 개수가 7 개일 때, N 의 최솟값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

A_N 의 진부분집합의 개수가 7 개라면,
 A_N 의 부분집합의 개수는 8 개이다.
 원소의 개수가 n 개인 부분집합의 개수 $= 2^n$
 집합 A_N 의 원소의 개수는 3 개이다.
 N 의 약수의 개수가 3 개가 되려면 N 은 소수의
 제곱수이어야 한다.
 따라서 가장 작은 소수인 2의 제곱수인 4가 N
 의 최솟값이다.

17. $n(\{0, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset)$ 를 구하여라.
 [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$n(\{\{0\}, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset) = 4 \times$
 $2 - 0 = 8$

18. 세 자연수 18, 45, x 의 최대공약수가 9, 최소공배
 수가 270 일 때, x 가 될 수 있는 수를 모두 구하여라.
 [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

▷ 정답 : 54

▷ 정답 : 135

▷ 정답 : 270

해설

270의 약수는 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 27, 30, 45,
 54, 90, 135, 270이다.
 이 수 중 18, 45과 최대공약수가 9, 최소공배수가
 270을 만족하는 수를 찾으면
 $x = 27, 54, 135, 270$

19. 어떤 자연수 x 의 약수의 개수를 $R(x)$ 라 하고, $R(40) \times$
 $R(75) = a$ 라 할 때, $R(a)$ 의 값을 구하여라.
 [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$40 = 2^3 \times 5$ 이므로 $R(40) = (3+1) \times (1+1) = 8$ 이다.

$75 = 3 \times 5^2$ 이므로 $R(75) = (1+1) \times (2+1) = 6$ 이다.

$$\therefore 8 \times 6 = 48$$

따라서 $48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $R(48) = (4+1) \times (1+1) = 10$ 이다.

20. 105를 분모로 하는 양의 기약분수 중에서 1보다 작은 분수는 모두 몇 개인가? [배점 5, 상하]

① 49 ② 48 ③ 47 ④ 46 ⑤ 45

해설

$$\frac{n}{105} = \frac{n}{3 \times 5 \times 7} < 1$$

n 은 3, 5, 7 의 배수를 제외한 105 미만의 수
1 부터 104 까지의 자연수 중에서

3 의 배수를 A_3 , 5 의 배수를 A_5 , 7 의 배수를 A_7 이라 할 때,

$$n(A_3) = 34, n(A_5) = 20, n(A_7) = 14$$

$$n(A_3 \cap A_5) = n(A_{15}) = 6$$

$$n(A_5 \cap A_7) = n(A_{35}) = 2$$

$$n(A_3 \cap A_7) = n(A_{21}) = 4$$

$$n(A_3 \cap A_5 \cap A_7) = n(A_{105}) = 0$$

$$\begin{aligned} n(A_3 \cup A_5 \cup A_7) &= n(A_3) + n(A_5) + n(A_7) \\ &\quad - n(A_3 \cap A_5) - n(A_5 \cap A_7) - n(A_7 \cap A_3) + n(A_3 \cap A_5 \cap A_7) \end{aligned}$$

$$= 34 + 20 + 14 - 6 - 2 - 4 + 0 = 56$$

$$n((A_3 \cup A_5 \cup A_7)^c) = 104 - 56 = 48$$

21. 자연수를 원소로 하는 집합 $A = \{x|x \text{는 } 2^2 \times 3^4 \times 5^3 \text{의 약수}\}$,
 $B = \{x|x \text{는 } 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \text{의 약수}\}$ 에 대하여
 $n(A \cup B)$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 76

해설

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$A = \{x|x \text{는 } 2^2 \times 3^4 \times 5^3 \text{의 약수}\}$ 이므로,
 $n(A) = 3 \times 5 \times 4 = 60$,

$B = \{x|x \text{는 } 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \text{의 약수}\}$ 이므로,
 $n(B) = 4 \times 4 \times 2 \times 2 = 64$,

$A \cap B = \{x|x \text{는 } 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \text{의 약수}\}$ 이므로,
 $n(A \cap B) = 3 \times 4 \times 2 \times 2 = 48$,

$$\therefore n(A \cup B) = 60 + 64 - 48 = 76$$

22. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2m-1\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m-1$ 은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개일 때 자연수 m 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2m-1\} \rightarrow n(A) = m \text{ (개)}$$

원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m-1$ 은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개이므로

$$2^{m-2-2} = 32, m-4 = 5$$

$$m = 9$$

23. $\frac{x-9}{2} = \frac{y}{3}$ 를 만족하는 두 자연수 x, y 의 최소공배수가 45 일 때, x, y 의 최대공약수를 구하여라.
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{x-9}{2} = \frac{y}{3} \rightarrow 3 \times (x-9) = 2 \times y,$$

x, y 의 최소공배수가 $45 = 3^2 \times 5$,

위 두 조건을 만족시키는 x, y 의 값은 $x = 15$, $y = 9$ 이다.

$\therefore (x, y \text{의 최대공약수}) = 3$

24. 자연수 a 의 약수의 개수를 $N(a)$ 로 나타낼 때 $N(600) \times N(a) = 96$ 인 자연수 a 중에서 가장 작은 수를 구하면?
[배점 6, 상중]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 12

해설

$$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \text{ 이므로 } N(600) = 4 \times 2 \times 3 = 24$$

$$24 \times N(a) = 96 \quad \therefore N(a) = 4$$

약수의 개수가 4 개인 가장 작은 자연수는 $6 = 2 \times 3$ 이다.

25. 양팔저울과 몇 개의 추로 364g 까지의 자연수 무게를 측정하려고 한다. 필요한 최소의 추의 개수는 몇 개인지 구하여라.
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설

양팔저울은 오른쪽 저울에 올리는 경우, 왼쪽 저울에 올리는 경우, 올리지 않는 경우로 총 세 가지 경우가 가능하므로, 양팔저울을 이용한 무게 측정은 3 진법으로 나타낼 수 있다.

3 진법의 추는 1g, 3g, 9g, 27g, 81g, 243g, 729g, ... 이고, $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364$ 이므로, 필요한 최소의 추는 6 개이다.