

단원 종합 평가

1. 다음 중 옳은 것은?

[배점 3, 중하]

① $4 \times (-2)^3 = 32$

② $(-2)^2 \times (-2)^2 = -16$

③ $(-2)^2 \times (-8) = -32$

④ $9 \times 3^2 = 3^3$

⑤ $(-3) \times (-3)^3 = -3^4$

해설

① $4 \times (-2)^3 = 4 \times (-8) = -32$

② $(-2)^2 \times (-2)^2 = (-2)^4 = 16$

③ $(-2)^2 \times (-8) = 4 \times (-8) = -32$

④ $9 \times 3^2 = 3^2 \times 3^2 = 3^4$

⑤ $(-3) \times (-3)^3 = (-3)^4 = 3^4$

2. 다음 중 결과가 나머지 것과 다른 것을 골라라.

㉠ a^{2+2+2}

㉡ $a^2 \times a^3$

㉢ $(a^2)^2 \times a^2$

㉣ $a^2 \times a^3 \times a$

㉤ $(a^2)^3$

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

해설

㉠ $a^{2+2+2} = a^6$

㉡ $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$

㉢ $(a^2)^2 \times a^2 = a^4 \times a^2 = a^6$

㉣ $a^2 \times a^3 \times a = a^{2+3+1} = a^6$

㉤ $(a^2)^3 = a^6$

3. 안에 들어갈 가장 간단한 식을 구하여라.

$$x + 4y - \{2x - (3y - \square + y) + y\} = 5x - (3x + 2y)$$

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: $-3x + 9y$

해설

$$x + 4y - \{2x - (3y - \square + y) + y\}$$

$$= x + 4y - (2x - 3y + \square - y + y)$$

$$= x + 4y - (2x - 3y + \square)$$

$$= -x + 7y - \square$$

$$-x + 7y - \square = 5x - 3x - 2y = 2x - 2y$$

$$\therefore \square = -x + 7y - 2x + 2y = -3x + 9y$$

4. $(4x - 5y + 3)(x + 3y)$ 를 전개했을 때, xy 의 계수를 구하여라.
[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$$(4x-5y+3)(x+3y) = 4x^2 + 12xy - 5xy - 15y^2 + 3x + 9y = 4x^2 + 7xy - 15y^2 + 3x + 9y$$

5. n 이 홀수 일 때,
 $(-1)^n + (-1)^{n+1} - (-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}$ 의 값을 구하
 여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 0

해설

$$n \text{ 이 홀수이면 } (-1)^n = -1, (-1)^{n+1} = 1, \\ (-1)^{2n} = 1, (-1)^{2n+1} = -1 \text{ 이므로} \\ -1 + 1 - 1 - (-1) = 0$$

6. 어떤 식에 $-x^2 + 2x + 5$ 를 빼어야 할 것을 잘못하여
 더했더니 $3x^2 + 3x + 2$ 가 되었다. 올바르게 계산한 식을
 구하면? [배점 4, 중중]

① $2x^2 + 5x + 7$ ② $4x^2 + x - 3$

③ $4x^2 - x + 3$ ④ $5x^2 + x + 2$

⑤ $5x^2 - x - 8$

해설

어떤 식을 A라하면

$$A + (-x^2 + 2x + 5) = 3x^2 + 3x + 2$$

$$A = (3x^2 + 3x + 2) - (-x^2 + 2x + 5) = 4x^2 + x - 3$$

$$\therefore (4x^2 + x - 3) - (-x^2 + 2x + 5)$$

$$= 5x^2 - x - 8$$

7. 식 $(3x - 4y - 3) - (x - 2y - 3)$ 을 간단히 하면?
 [배점 4, 중중]

① $2x - 3y + 6$

② $2x - 2y$

③ $2x - 2y + 6$

④ $2x - 2y - 6$

⑤ $2x - 6y$

해설

$$(3x - 4y - 3) - (x - 2y - 3)$$

$$= 3x - 4y - 3 - x + 2y + 3 = 2x - 2y$$

8. $x = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{y}}}$ 일 때, y 를 x 에 관하여 풀어라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

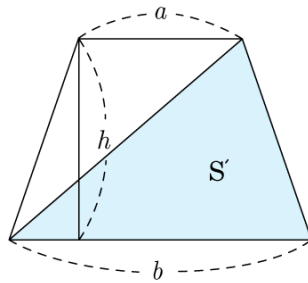
▶ 정답 : $y = -x + 1$

해설

$$x = \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{y-1}{y}}} = \frac{1}{1 - \frac{y}{y-1}} = \frac{1}{\frac{(y-1)-y}{y-1}} = \frac{y-1}{-1} = -y+1$$

$x = -y+1$ 에서 y 를 x 에 관하여 풀면 $y = -x+1$ 이다.

9. 다음 그림과 같이 사다리꼴의 윗변의 길이와 아랫변의 길이를 각각 a, b , 높이를 h , 넓이를 S 라고 하고, 색칠한 삼각형의 넓이를 S' 이라고 할 때, S' 을 a, b, S 에 관한 식으로 나타낸 것은?



[배점 4, 중중]

- ① $S' = \frac{aS}{a+b}$ ② $S' = \frac{aS}{a-b}$
 ③ $S' = \frac{bS}{a+b}$ ④ $S' = \frac{bS}{a-b}$
 ⑤ $S' = \frac{S}{a+b}$

해설

$S = \frac{1}{2}(a+b)h$ 이므로 h 에 관하여 정리하면

$$2S = (a+b)h \quad \therefore h = \frac{2S}{a+b}$$

색칠한 삼각형의 넓이 S' 을 구하면 $S' = \frac{1}{2}bh$

$$\therefore S' = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}b \times \frac{2S}{a+b} = \frac{bS}{a+b}$$

10. 두 수 x, y 에 대하여 연산 $\star, \blacktriangle$ 를 $x\star y = x^2y$, $x\blacktriangle y = xy^2$ 으로 정의한다. 이 때, 다음을 만족하는 X, Y 에 대하여 $3a(X \div Y)$ 의 값을 구하여라.

$$3a\star X = 12a^2b, Y\blacktriangle 5b = 100ab^2$$

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : b

해설

$$3a\star X = 12a^2b \text{ 에서}$$

$$(3a)^2 X = 12a^2b$$

$$\therefore X = \frac{12a^2b}{9a^2} = \frac{4}{3}b$$

$$Y\blacktriangle 5b = 100ab^2$$

$$Y(5b)^2 = 100ab^2 \text{ 에서}$$

$$\therefore Y = \frac{100ab^2}{25b^2} = 4a$$

$$\therefore 3a(X \div Y) = 3a\left(\frac{4b}{3} \times \frac{1}{4a}\right) = 3a\left(\frac{b}{3a}\right) = b$$

- 11.

4개의 수 a, b, c, d 에 대하여 기호 $\left| \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right|$ 를

$ad - bc$ 로 정의 한다.

이때, $\left| \begin{smallmatrix} x+2y-3 & -\frac{3}{2} \\ y-x+1 & \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right|$ 은?

[배점 5, 중상]

① $x - \frac{5}{2}y - 3$

② $x - \frac{3}{2}y - 2$

③ $x + \frac{3}{2}y - 1$

④ $-x + \frac{5}{2}y$

⑤ $-x + \frac{7}{2}y$

해설

$$\begin{aligned}
 & (x+2y-3) \times \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) \times (y-x+1) \\
 &= \left(\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \\
 &= -x + \frac{5}{2}y
 \end{aligned}$$

12. 두 식 a, b 에 대하여 $\#, *$ 을 $a\#b = a + b - ab$, $a*b = a(a+b)$ 로 정의하자. $a = -x, b = x - 4y$ 일 때, $(a\#b) + (a*b)$ 를 x, y 에 관한 식으로 나타내면?
[배점 5, 중상]

- ① $x^2 - y$ ② $x^2 - 4$ ③ $2x^2 - y$
④ $2x^2 - 2y$ ⑤ $x^2 - 4y$

해설

$$\begin{aligned}
 & (-x)\#(x-4y) \\
 &= -x + x - 4y + x(x-4y) = x^2 - 4xy - 4y \quad \dots (1) \\
 & (-x)*(x-4y) = -x(-x + x - 4y) = 4xy \quad \dots (2) \\
 & (1) + (2) \text{ 하면 } x^2 - 4y
 \end{aligned}$$

13. 두 순서쌍 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 에 대하여 $(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2$ 로 정의한다. 이 때, $(2x, y) \times (-y, 3x)$ 를 간단히 하면?
[배점 5, 중상]

- ① $-6x^2 + 2xy - y^2$ ② $-6x^2 + xy + 3y^2$
③ $2x^2 - xy - y^2$ ④ $6x^2 + xy - y^2$
⑤ $6x^2 - xy + 3y^2$

해설

$$\begin{aligned}
 & 2x \times (-y) + 2x \times 3x + y \times (-y) + y \times 3x \\
 &= -2xy + 6x^2 - y^2 + 3xy \\
 &= 6x^2 + xy - y^2
 \end{aligned}$$

14. 상수 a, b, c, d 에 대하여 다음 보기에서 $a+b-3c+3d$ 의 값을 구하여라.

보기

$$\begin{aligned}
 \text{㉠ } & x - [2x - (y - 3x) - \{x - (3x - y)\}] = \\
 & \quad ax + by \\
 \text{㉡ } & 5y - \left[2y - \frac{2}{3}(x - y) - \left\{\frac{5}{3}x - (x - 4y)\right\}\right] \\
 & \quad = cx + dy
 \end{aligned}$$

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$\begin{aligned}
\textcircled{7} \quad & x - [2x - (y - 3x) - \{x - (3x - y)\}] \\
&= x - \{2x - y + 3x - (x - 3x + y)\} \\
&= x - \{2x + 3x - y - (-2x + y)\} \\
&= x - (5x - y + 2x - y) \\
&= x - (5x + 2x - y - y) \\
&= x - (7x - 2y) \\
&= x - 7x + 2y \\
&= -6x + 2y
\end{aligned}$$

이므로 $a = -6$, $b = 2$ 이다.

$$\begin{aligned}
\textcircled{8} \quad & 5y - \left[2y - \frac{2}{3}(x - y) - \left\{ \frac{5}{3}x - (x - 4y) \right\} \right] \\
&= 5y - \left\{ 2y - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \left(\frac{5}{3}x - x + 4y \right) \right\} \\
&= 5y - \left\{ -\frac{2}{3}x + 2y + \frac{2}{3}y - \left(\frac{2}{3}x + 4y \right) \right\} \\
&= 5y - \left(-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}y - \frac{2}{3}x - 4y \right) \\
&= 5y - \left(-\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y \right) \\
&= 5y + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}y \\
&= \frac{4}{3}x + \frac{19}{3}y
\end{aligned}$$

이므로 $c = \frac{4}{3}$, $d = \frac{19}{3}$ 이다.

$$\therefore a + b - 3c + 3d = -6 + 2 - 3 \times \frac{4}{3} + 3 \times \frac{19}{3} = 11$$

15. $x = 2$, $y = \frac{1}{3}$, $z = -4$ 일 때, $\frac{xy^2z - 2x^2y + 5yz^2}{3x^2yz}$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : $-\frac{13}{9}$

해설

$$\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \frac{y}{3x} - \frac{2}{3z} + \frac{5z}{3x^2} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} - \left(\frac{2}{-\frac{1}{12}} \right) + \left(-\frac{20}{12} \right) \\
&= \frac{1}{18} + \frac{1}{6} - \frac{5}{3} \\
&= -\frac{13}{9}
\end{aligned}$$

16. 지름이 7mm 인 금 구슬 1 개의 가격은 지름이 rmm 인 금 구슬 7 개로 만든 팔찌 몇 개의 가격과 같은지 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 49 개

해설

지름이 7mm 인 금 구슬 1 개의 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{7r}{2} \right)^3 = \frac{7^3}{6}\pi r^3 \text{ 이고,}$$

지름이 rmm 인 금 구슬 7 개의 부피는

$$7 \times \left[\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{r}{2} \right)^3 \right] = \frac{7}{6}\pi r^3 \text{ 이다.}$$

따라서 지름이 7mm 인 금 구슬 1 개의 부피는 지름이 rmm 인 금 구슬 7 개로 만든 팔찌의 부피의 7^2 배이므로, 지름이 7mm 인 금 구슬 1 개의 가격은 지름이 rmm 인 금 구슬 7 개로 만든 팔찌 49 개의 가격과 같다.

17. $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$ 일 때, x 의 값을 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} &= 117 \text{ 에서} \\ 3^x \times \frac{1}{3} + 3^x + 3^x \times 3 &= 117 \\ \left(\frac{1}{3} + 1 + 3\right) \times 3^x &= 117 \\ \frac{13}{3} \times 3^x &= 117 \\ 3^x &= 27 \\ \therefore x &= 3 \end{aligned}$$

18. $a = 2^{x-1}$ 일 때, 16^x 을 a 에 관한 식으로 나타낸 것을 고르면?
[배점 5, 상하]

- ① $8a^3$ ② $8a^4$ ③ $16a^3$
④ $16a^4$ ⑤ $32a^4$

해설

$$\begin{aligned} a &= 2^{x-1}, 2^x = 2a \\ 16^x &= (2^4)^x = (2^x)^4 = (2a)^4 = 16a^4 \end{aligned}$$

19. $x = 2, y = -1$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$2x - [7y - 2x - \{2x - (x - 3y)\}]$$

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\begin{aligned} 2x - [7y - 2x - \{2x - (x - 3y)\}] &\text{ 을 정리하면} \\ 2x - \{7y - 2x - (x + 3y)\} \\ &= 2x - (-3x + 4y) \\ &= 5x - 4y \\ 5x - 4y &= 5 \times 2 - 4 \times (-1) = 14 \end{aligned}$$

20. $x + y + z = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 1, xyz = 12$ 일 때, $x^3 + y^3 + z^3$ 의 값을 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \\ &= 4^2 - 2(xy + yz + zx) = 1 \\ \therefore xy + yz + zx &= \frac{15}{2} \\ \therefore x^3 + y^3 + z^3 &= (x + y + z) \{x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)\} + 3xyz \\ &= 4\left(1 - \frac{15}{2}\right) + 36 = 10 \end{aligned}$$

21. $(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16}) = a3^b - 2^c$
일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 65

해설

$$\begin{aligned} & (3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16}) \\ &= a3^b - 2^c \text{ 에서 양변에 } (3-2) \text{ 를 곱하면} \\ & (3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16}) = (3-2)(a3^b - 2^c) \\ & (3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16}) = a3^b - 2^c \\ & (3^4-2^4)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16}) = a3^b - 2^c \\ & 3^{32} - 2^{32} = a3^b - 2^c \\ & \therefore a = 1, b = 32, c = 32 \\ & \therefore a + b + c = 65 \end{aligned}$$

22. 자연수 n 에 대하여 $2^n, 3^n, 4^n, 5^n$ 각각의 일의 자리 숫자의 합을 $f(n)$ 이라 정의하고, $g(n) = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ 이라 정의할 때, $f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \cdots + f(g(100))$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1808

해설

2^n 의 일의 자리 숫자는 2, 4, 8, 6 이 반복되고
 3^n 의 일의 자리 숫자는 3, 9, 7, 1 이 반복되고
 4^n 의 일의 자리 숫자는 4, 6 이 반복되고
 5^n 의 일의 자리 숫자는 5 이다.

$g(1), g(2), g(3), \dots$ 는 각각 1, 2, 6, 24, 120, 720, $\dots$ 에서 보듯이 $g(4)$ 부터는 모두 4 의 배수이다.
따라서

$$f(g(1)) = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

$$f(g(2)) = 4 + 9 + 6 + 5 = 24$$

$$f(g(3)) = 4 + 9 + 6 + 5 = 24$$

$$f(g(4)) = f(g(5)) = f(g(6)) = \cdots = f(g(100)) = 6 + 1 + 6 + 5 = 18$$

$$\therefore f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \cdots + f(g(100)) = 14 + 24 + 24 + 18 \times 97 = 1808$$

23. 네 개의 수 a, b, c, d 에 대하여 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ 로

정의한다. $A = x+1, B = -2x+3$ 이고, $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} B & pA \\ A & -qB \end{pmatrix}$ 일 때, 상수 p, q 의 값을 각각 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $p = -1$

▷ 정답 : $q = 1$

해설

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & pA \\ A & -qB \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = -qB^2 - pA^2$$

$$(1+p)A^2 = (1-q)B^2$$

$$A = x+1, B = -2x+3 \text{ 이므로}$$

$$(1+p)(x+1)^2 = (1-q)(-2x+3)^2 \text{ 이다.}$$

$$(1+p)x^2 + (2+2p)x + (p+1)$$

$$= (4-4q)x^2 + (-12+12q)x + (9-9q)$$

$$1+p = 4-4q \Rightarrow p = 3-4q \dots \textcircled{㉠}$$

$$2+2p = -12+12q \Rightarrow 2p-12q = -14$$

$$\Rightarrow p-6q = -7 \dots \textcircled{㉡}$$

$$p+1 = 9-9q \Rightarrow p+9q = 8 \dots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢ 어떤 식에 대입해도 상관없으므로 ㉠

식을 ㉡식에 대입하면

$$3-4q-6q = -7, q = 1 \dots \textcircled{㉣}$$

㉣를 ㉠식에 대입하면

$$p = 3-4 \times 1 = -1 \text{ 따라서 } p = -1, q = 1$$

24. $f(x) = a^{2x}b^{3x}$ 이고, $f(3x+1) = f(m) \times f^n(x)$ 일 때, $m-n$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : -2

해설

$$f(x) = a^{2x}b^{3x} = (a^2b^3)^x \text{ 이므로}$$

$$(\text{좌변}) = f(3x+1) = (a^2b^3)^{3x+1}$$

$$(\text{우변}) = f(m) \times f^n(x)$$

$$= (a^2b^3)^m \times ((a^2b^3)^x)^n$$

$$= (a^2b^3)^m \times (a^2b^3)^{nx}$$

$$= (a^2b^3)^{nx+m}$$

따라서 $3x+1 = nx+m, n=3, m=1$ 이다.

$$\therefore m-n = 1-3 = -2$$

25. 서로 다른 두 자연수 a, b 의 최소공배수는 60 이고, $9a-b=6$ 일 때, 두 수의 최대공약수를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 2

해설

a, b 의 최대공약수를 G , 최소공배수를 L 이라고 하면 $a = xG, b = yG, L = xyG$ (단, x 와 y 는 서로소)로 놓을 수 있다.

최소공배수가 60 이므로 $xyG = 60 \dots \textcircled{㉠}$

또 $9a-b=6$ 이므로

$$9xG - yG = 6 \dots \textcircled{㉡}$$

각 변끼리 $\frac{\textcircled{㉡}}{\textcircled{㉠}}$ 을 계산하면

$$\frac{9xG - yG}{xyG} = \frac{6}{60} \text{ 에서 } \frac{9x-y}{xy} = \frac{1}{10},$$

$$90x - 10y = xy, x(90-y) = 10y,$$

$y > 0, 90-y > 0$ 이므로 $1 \leq y \leq 89$ 이고

$xyG = 60$ 이므로 $1 \leq y \leq 60$ 을 만족하는 (x, y) 의 순서쌍은 $(2, 15), (5, 30), (10, 45), (15, 54)$

x, y 는 서로소인 자연수이므로

$$x = 2, y = 15$$

따라서 두 수의 최대공약수는

$$xyG = 60 \text{ 에서 } G = 2$$