문제 풀이 과제

1. 이차함수 $y = -2x^2 - 4x - 6$ 의 최댓값을 구하여라. [배점 2, 하하]

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$y = -2x^2 - 4x - 6$
$= -2(x+1)^2 - 4$
$x = -1$ 일 때, 최댓값 -4를 갖는다.

2. 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 모양이 같고, $x = -1$ 일 때, 최댓값 2 를 갖는 이차함수의 식을 $y = ax^2+bx+c$ 라고 할 때, $a-b+c$ 의 값을 구하여라.(단, $a,\ b,\ c$ 는 상수) [배점 2, 하중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-b+c = 2$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 2)$, x^2 의 계수가 1 이므로 이차함수의 식은 $y = (x+1)^2 + 2$ 이다.
$y = (x+1)^2 + 2$ 을 전개하면 $y = x^2 + 2x + 3$ 이므로 $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$ 이다.
$\therefore a-b+c = 1-2+3 = 2$

3. 이차함수 $y = -3(x-2)(x-4)$ 의 그래프에서 최댓값을 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = -3(x-2)(x-4)$
$= -3(x^2 - 6x + 8)$
$= -3x^2 + 18x - 24$
$= -3(x-3)^2 + 3$
$x = 3$ 일 때, 최댓값은 3 이다.

4. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2$ 의 최솟값이 2 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 + ax + 2$
$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$
$-\frac{a^2}{4} + 2 = 2$
$\therefore a = 0$

5. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -4 를 가지며 점 $(1,\ 2)$ 를 지난다. 이 때, $a-b-c$ 의 값은? [배점 4, 중중]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

꼭짓점이 $(3,\ -4)$ 이므로 $y=a(x-3)^2-4$

$(1,\ 2)$ 를 대입하면

$2=4a-4$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

$y=\frac{3}{2}(x-3)^2-4=\frac{3}{2}x^2-9x+\frac{19}{2}$

$a=\frac{3}{2},\ b=-9,\ c=\frac{19}{2}$

$\therefore\ a-b-c=\frac{3}{2}-(-9)-\frac{19}{2}=1$

6. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t-5t^2)$m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가? [배점 5, 중상]

① 5 초 후 ② 7 초 후

③ 8 초 후 ④ 10 초 후

⑤ 알 수 없다

해설

$y=50t-5t^2$

$y=-5(t^2-10t+25-25)$

$=-5(t-5)^2+125$

따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가된다.

7. 한 직선 위에 있는 공장 A, B, C 가 A 와 B 사이의 거리는 10km, 공장 B, C 사이의 거리는 4km , 공장 A, C 사이의 거리는 14km 가 되게 나란히 있다. 부품을 수송하는 비용이 거리의 제곱에 비례할 때, 수송비를 가장 적게 들이려면 부품 공장을 공장 B 에서 공장 A 쪽으로 얼마나 떨어진 지점에 세워야 하는지 구하여라. (단, 부품 공장은 공장 A, B, C 와 한 직선 상에 세워야 한다.) [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2 km

해설

공장이 B 쪽에서 A 쪽으로 $x$km 떨어져 있다고 하고, 수송비를 y 원이라 하면

$y=(10-x)^2+x^2+(4+x)^2$

$=3(x-2)^2+104$

따라서 y 는 $x=2$ 일 때, 최솟값 104 를 가지므로 공장은 B 쪽에서 A 쪽으로 2km 떨어진 지점에 세워야 한다.

8. 정의역이 $\{x\mid 0\le x\le 3\}$ 일 때, 함수 $y=-(2x^2-4x-3)^2-5(2x^2-4x+1)+11$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $\frac{m}{M}$ 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$2x^2 - 4x = t$ 라고 치환하면 $0 \le x \le 3$ 에서 $t = 2(x-1)^2 - 2$ 이므로

$\therefore\ 0 \le t \le 6$

$y = -(2x^2 - 4x - 3)^2 - 5(2x^2 - 4x + 1) + 11$

$= -(t-3)^2 - 5(t+1) + 11$

$= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}$

$t = \frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값(M) 이 $-\frac{11}{4}$

$t = 6$ 일 때, 최솟값(m) 이 -33

따라서 구하는 값은 $\frac{-33}{-\frac{11}{4}} = 12$ 이다.

9. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값이 -2 이다. 이 함수의 그래프가 제 3 사분면을 지나지 않을 때, a 의 값이 될 수 있는 가장 작은 정수를 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x = 2$ 일 때 최솟값 -2 를 가진다. $y = a(x-2)^2 - 2$. 또한 최솟값이 존재하므로, $a > 0$ 이다. 그래프가 제3 사분면을 지나지 않는다는 조건을 만족해야 하므로, y 절편이 음이 아닌 실수이어야 한다.

따라서, y 절편$= 4a - 2 \ge 0$, $a \ge \frac{1}{2}$ 이다.

10. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖고 제2 사분면을 지나지 않는다고 할 때, a 의 값의 범위는? [배점 6, 상상]

① $a \ge -\frac{3}{4}$ ② $a \le -\frac{3}{4}$ ③ $a \le \frac{3}{4}$

④ $a \le 3$ ⑤ $a \ge -3$

해설

$y = a(x-2)^2 + 3(a < 0)$

$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$

$(y$절편$) \le 0, 4a + 3 \le 0$

$\therefore\ a \le -\frac{3}{4}$

11. $x = 2$ 일 때 최솟값 -1을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = a(x-p)^2 + q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = a(x-2)^2 - 1$

$= a(x^2 - 4x + 4) - 1$

$= ax^2 + 4ax + 4a - 1$

$4a - 1 = 3$

$a = 1$

$y = (x-2)^2 - 1$

$apq = 1 \times 2 \times (-1) = -2$

12. $x=-3$ 일 때 최댓값 4 를 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{16}{27}$

해설

$y=a(x+3)^2+4$

$=a(x^2+6x+9)+4$

$=ax^2+6ax+9a+4$

$=9a+4=2$

$9a=-2$

$a=-\frac{2}{9}$

$y=-\frac{2}{9}x^2-\frac{4}{3}x+2$

$apq=(-\frac{2}{9})\times(-\frac{4}{3})\times 2=\frac{16}{27}$

13. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 는 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+5$ 의 그래프와 모양이 같고 $x=-2$ 일 때 최댓값 3 을 갖는다. 이 때 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

[배점 6, 상상]

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$

$\quad=-\frac{1}{2}x^2-2x+1$

$\therefore a=-\frac{1}{2}, b=-2, c=1$

$\therefore a+b+c=\left(-\frac{1}{2}\right)+(-2)+1=-\frac{3}{2}$

14. 두 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x^2}{3}+(y-2)^2=1$ 이 성립할 때, x^2+y^2 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

[배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\frac{x^2}{3}+(y-2)^2=1$ 에서 $x^2=-3y^2+12y-9$를 주어진 식에 대입하면

$x^2+y^2=x^2+(-3y^2+12y-9)+y^2$

$\quad=-2y^2+12y-9$

$\quad=-2(y-3)^2+9$

그런데 x, y 는 실수이므로

$x^2=-3y^2+12y-9\geq 0$

$-3y^2+12y-9\geq 0$, $y^2-4y+3\leq 0$ 이므로 $1\leq y\leq 3$ 이다.

따라서 x^2+y^2 는 $y=1$ 일 때 최솟값이 1, $y=3$ 일 때 최댓값이 9 이므로 구하는 값은 $1+9=10$ 이다.

15. 좌표평면 위의 두 점 $A(4,\ 1)$, $B(1,\ -2)$ 와 직선 $y = 2x$ 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{211}{10}$

해설

점 P 의 좌표를 $(a,\ 2a)$ 라 하면

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$

$= (a-4)^2 + (2a-1)^2 + (a-1)^2 + (2a+2)^2$

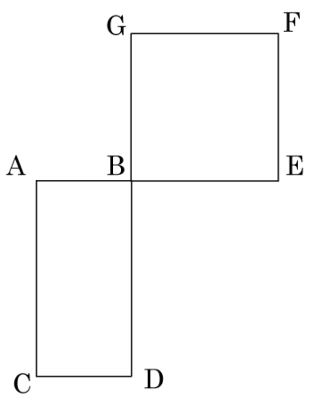
$= 10a^2 - 6a + 22$

$= 10\left(a - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{211}{10}$

따라서 $a = \frac{3}{10}$ 일 때, 최솟값은 $\frac{211}{10}$ 이다.

16. 다음 그림과 같이 선분 AB 의 연장선 위에 $\overline{AB} : \overline{BE} = 2 : 3$ 이 되도록 점 E 를 잡고 선분 BE 를 한 변으로 하는 정사각형 BEFG 를 그릴 때, 선분 GD 의 길이는 12 이다. 이때 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

[배점 6, 상상]



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{576}{13}$

해설

$\overline{AB} = x$ 라 하면

$\overline{AB} : \overline{BE} = 2 : 3$ 이므로

$\overline{BE} = \frac{3}{2}x = \overline{BG}$

$\overline{BD} = 12 - \overline{BG} = 12 - \frac{3}{2}x = \overline{AC}$

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = x^2 + (12 - \frac{3}{2}x)^2$

$= \frac{13}{4}(x - \frac{72}{13})^2 + \frac{576}{13}$

따라서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ 의 최솟값은 $\frac{576}{13}$ 이다.