

단원 테스트

1. 실수 a, b 에 대하여 $ax + b = 0$ 이 x 에 대한 항등식이 되기 위한 필요충분조건을 다음 중 보기에서 모두 고르면?

- ㉠ $a^2 + b^2 = 0$ ㉡ $ab = 0$
 ㉢ $a + bi = 0$ ㉣ $a + b\sqrt{3} = 0$

[배점 3, 중하]

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

$ax + b = 0$ 이 x 에 대한 항등식 $\leftrightarrow a = 0, b = 0$
 ㉠ $a^2 + b^2 = 0 \leftrightarrow a^2 = 0, b^2 = 0 \leftrightarrow a = 0, b = 0$
 ㉡ $ab = 0 \leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0$
 ㉢ $a + bi = 0 \leftrightarrow a = 0, b = 0$
 ㉣ (반례) $a = \sqrt{3}, b = -1 \Rightarrow a + b\sqrt{3} = 0$
 $\therefore$ ㉠, ㉢

2. 100이하의 자연수 중 k 의 배수 집합을 $A_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ 라 할 때, $n(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ 의 값은? (단, $n(A)$ 는 A 의 원소의 개수) [배점 3, 중하]

- ① 8 ② 12 ③ 16 ④ 33 ⑤ 50

해설

$A_a \cap A_b \rightarrow a$ 와 b 의 공배수의 집합 $\rightarrow a$ 와 b 의 최소공배수의 배수집합 $\rightarrow A_a$ 와 b 의 최소공배수 $n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = A_{12} \Rightarrow 12$ 배수의 집합
 $100 \div 12 = 8 \dots 4$ 이므로 8개

3. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 P, Q 라 하자. 두 집합 P, Q 가 $P \cup Q = P$ 를 만족할 때, 다음 명제 중 항상 참인 것은? [배점 4, 중중]

- ① $p \rightarrow q$ ② $\sim p \rightarrow \sim q$
 ③ $\sim p \rightarrow q$ ④ $\sim q \rightarrow \sim p$
 ⑤ $p \rightarrow \sim p$

해설

$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \rightarrow p$ (참) $\Rightarrow$
 $\sim p \rightarrow \sim q$ (참)

4. 전체집합 U 의 부분집합 A, B 가 $A \cap B = \emptyset$ 이고, $A \cap X^c = A \cap B$ 를 만족하는 X 가 될 수 없는 것은? [배점 4, 중중]

- ① $A - B$ ② $(A \cup B)^c$ ③ B^c
 ④ $(A \cap B)^c$ ⑤ $A \cap B^c$

해설

$A \cap B = \emptyset$ 이고 $A \cap X^c = A \cap B$ 이므로 $A - X = A \cap B = \emptyset \leftrightarrow A \subset X \dots$ ①
 보기 중 $(A \cup B)^c$ 은 ①의 관계를 만족하지 않는다.

5. 100 명의 학생 중 축구를 좋아하는 학생이 77 명, 농구를 좋아하는 학생이 57 명이다. 축구와 농구를 모두 좋아하는 학생수의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때 $a + b$ 의 값은? [배점 4, 중중]

① 90 ② 91 ③ 93 ④ 96 ⑤ 97

해설

최대일 때는 한 쪽이 다른 쪽에 포함될 때이다..
 $a = 57$
 모두 좋아하는 학생수를 x 라 하면 $77 + 57 - x \leq 100$, $x \geq 34$
 $\therefore b = 34 \therefore a + b = 91$

6. 세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하면 $P \cap Q = P$, $Q \cup R = R$ 이 성립한다. 이 때, 다음 중 항상 참인 명제는? [배점 5, 중상]

① $\sim p \rightarrow \sim q$ ② $q \rightarrow p$
 ③ $q \rightarrow \sim r$ ④ $\sim r \rightarrow \sim p$
 ⑤ $\sim p \rightarrow \sim r$

해설

$P \cap Q = P$ 이면 $P \subset Q$ $Q \cup R = R$ 이면 $Q \subset R$
 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ 이다. $\therefore$ 대우 : $\sim r \Rightarrow \sim p$ 도 참이다.

7. 다음은 a, b 가 실수일 때, 보기 중에서 서로 동치인 것끼리 짝지어 놓은 것이다. 옳지 않은 것은?

㉠ $ab = 0$
 ㉡ $a^2 + b^2 = 0$
 ㉢ $a^2 + b^2 > 0$
 ㉣ $a = 0$ 이고 $b = 0$
 ㉤ $a = 0$ 또는 $b = 0$
 ㉥ $a = 0$ 이고 $b \neq 0$
 ㉦ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
 ㉧ $ab = 0$ 이고 $b \neq 0$
 ㉨ $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$

[배점 5, 중상]

① ㉠과 ㉡ ② ㉡와 ㉢ ③ ㉢과 ㉦
 ④ ㉤와 ㉧ ⑤ ㉣과 ㉨

해설

$ab \leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0$ $a^2 + b^2 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b = 0$ $a^2 + b^2 > 0 \leftrightarrow a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
 $ab = 0$ 이고 $b \neq 0 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b \neq 0$

8. 어느 학급의 학생 55명 중에서 음악을 좋아하는 학생이 36명, 영화를 좋아하는 학생이 27명이었다. 음악과 영화를 둘 다 좋아하는 학생의 수를 k 라 할 때, k 가 취할 수 있는 최댓값 M 과 최솟값 m 에 대하여 $M - m$ 의 값은? [배점 5, 중상]

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

해설

문장으로 표현된 문제는 먼저 수학적 기호로 바꾸어 표현해야 하는데, 우리가 구해야 하는 것은 두 집합의 교집합 개수의 범위이다.

전체 학생의 집합을 U , 음악을 좋아하는 학생의 집합을 A , 영화를 좋아하는 학생의 집합을 B 라 하면 $n(U) = 55$, $n(A) = 36$, $n(B) = 27$ 이고, 음악과 영화를 둘 다 좋아하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이므로 $n(A \cap B) = k$ 이다.

$$\therefore k = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \geq n(A) + n(B) - n(U) = 36 + 27 - 55 = 8$$

$$\text{한편, } k \leq n(B) = 27 \text{ 이므로 } 8 \leq k \leq 27$$

$$\therefore M - m = 27 - 8 = 19$$

9. x, y 가 실수일 때, 다음 조건 중에서 조건 A 가 조건 B 이기 위한 필요충분조건인 것은? [배점 5, 상하]

① $A : x + y > 2$ $B : x > 1$ 이고 $y > 1$

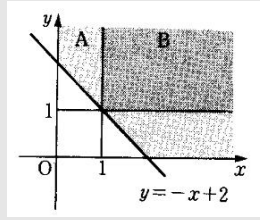
② $A : |x| + |y| = 0$ $B : \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 0$

③ $A : x + y > 0$ 이고 $xy > 0$ $B : x > 0$ 이고 $y > 0$

④ $A : xy > x + y > 4$ $B : x > 2$ 이고 $y > 2$

⑤ $A : x + y > 2$ $B : x > 2$ 또는 $y > 1$

해설



① 그림에서 $A \not\subset B$ 이다. 즉, $B \subset A$ 이므로 A 는 B 이기 위한 필요조건

② $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0, 3\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} = 0$ 을 만족시키는 x, y 는 $x = 0, y = 0$ 이외에도 $x = 8, y = -8, \dots$ 등이 있다. $\therefore A \not\subset B$ (충분조건)

③ A 는 x 축, y 축을 제외한 제1 사분면을 나타내므로 B 와 동치이다.

④ $A \not\subset B$ 이다. (필요조건) (반례) $x = 4, y = \frac{3}{2}$ 이다. $xy > x + y > 4$ 이지만, $x > 2, y < 2$ 이다.

⑤ (충분조건) (반례) $x = 3, y = -4$ 는 B 를 만족시키지만 A 를 만족시키지 않는다. $\therefore A \not\subset B$

10. 두 집합 A, B 에 대하여 집합 $A \times B$ 를 $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ 라고 정의한다. $A \cup B$ 와 $A \cap B$ 의 원소의 개수가 각각 10, 2일 때, 집합 $A \times B$ 의 원소의 개수의 최댓값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 36

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서 $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) = 10 + 2 = 12$
 $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ 이므로, 최댓값은 $n(A) = n(B) = 6$ 일 때, 36이다.