

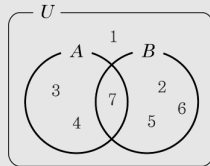
단원 종합 평가

1. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{3, 4\}$, $B - A = \{2, 5, 6\}$, $(A \cup B)^c = \{1\}$ 일 때, 집합 B 를 나타낸 것으로 옳은 것은?
[배점 3, 중하]

- ① $\{2, 5, 6\}$ ② $\{2, 5, 6, 7\}$
③ $\{1, 2, 5\}$ ④ $\{1, 2, 5, 6\}$
⑤ $\{1, 2, 5, 6, 7\}$

해설

주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면



$$\therefore B = \{2, 5, 6, 7\}$$

[별해] $(A \cup B)^c = \{1\}$ 이므로

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ 이다.}$$

$$B = (A \cup B) - (A - B) = \{2, 5, 6, 7\}$$

2. 태환이가 오늘 배운 소인수분해를 이용하여 $3^3 \times 10 \times 5^2$ 의 약수의 개수를 구하는 과정을 다음과 같이 수학 공책에 적었다. 밑줄 친 부분 중 틀린 부분을 말하여라.

문제) $3^3 \times 10 \times 5^2$ 의 약수의 개수 구하기
풀이)

㉠ 10 을 소인수분해하면 2×5 이므로

$$\text{㉡ } 3^3 \times 10 \times 5^2 = 2 \times 3^3 \times 5^3$$

㉢ 약수의 개수를 구할 때, 각 지수에 1 을 더하여 곱하면

$$\text{㉣ } (0+1) \times (3+1) \times (3+1) = 16(\text{개}) \text{ 이다.}$$

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2 \times 3^3 \times 5^3$ 에서 2, 3^3 , 5^3 의 지수는 각각 1, 3, 3 이므로 약수의 개수는 $(1+1) \times (3+1) \times (3+1) = 32$ (개) 이다.

3. 600 을 자연수 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 나누어야 할 가장 작은 자연수를 구하여라.
[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

600 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2) 600 \\ 2) 300 \\ 2) 150 \\ 3) 75 \\ 5) 25 \\ 5 \end{array}$$

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ 이므로 $\frac{2^3 \times 3 \times 5^2}{x}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 x 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 $2 \times 3 = 6$ 이다.

4. a 와 12 의 공배수가 12 의 배수와 같을 때, 다음 중 a 의 값이 될 수 없는 것은? [배점 3, 중하]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 12 ⑤ 24

해설

a 와 12 의 공배수가 12 의 배수와 같다는 것은 a 와 12 의 최소공배수가 12 이라는 뜻이므로 a 와 12 의 최소공배수가 12 가 나오기 위해서는 a 가 12 의 약수가 되어야 한다.
24 는 12 의 약수가 아니고 a 가 24 가 될 경우 24 와 12 의 최소공배수는 24 이므로 24 가 아니다.

5. 두 집합 $A = \{6, a, 3, b, 2\}$, $B = \{5, c, 3, d, 7\}$ 이 서로 같을 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.
[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 20

해설

$A = B$ 이므로

$$\{6, a, 3, b, 2\} = \{5, c, 3, d, 7\}$$

이 중 3 은 공통이므로 제외하면

$$a = 5, b = 7 \text{ 또는 } a = 7, b = 5$$

$$\text{따라서 } a + b = 12$$

$$c = 2, d = 6 \text{ 또는 } c = 6, d = 2$$

$$\text{따라서 } c + d = 8$$

$$\therefore a + b + c + d = 20$$

6. 집합 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, 소수는 1 과 자기 자신만을 약수로 가지는 수이다.) (정답 2 개) [배점 4, 중중]

① $4 \in A$

② $\emptyset \subset A$

③ $\{3, 7\} \in A$

④ $\{x \mid x \text{는 } 8 \text{ 이하의 } 2 \text{의 배수}\} \subset A$

⑤ $A \subset \{x \mid x \text{는 } 1 \text{ 이상 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$

해설

① $4 \notin A$

③ $\{3, 7\} \subset A$

⑤ $A \subset A = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{ 이상 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$

7. 집합 $X = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{x|x \text{는 } 4 \text{의 약수}\}$ 일 때, $A \cup B = X$ 가 되는 집합 B 의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8개

해설

$X = \{1, 2, 4, 8\}$, $A = \{1, 2, 4\}$ 이고
 $A \cup B = X$ 가 되어야 하므로 집합 B 는 원소 8을 반드시 포함해야 한다.
 따라서, 집합 B 는
 $\{8\}$, $\{1, 8\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 8\}$, $\{1, 2, 8\}$,
 $\{1, 4, 8\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{1, 2, 4, 8\}$
 이므로 8개이다.

8. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 10 \text{이하의 홀수}\}$ 의 부분집합 중에서 3의 약수를 모두 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8개

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중 원소 1, 3을 모두 포함하는 부분집합의 개수는
 $2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

9. 세 자연수의 비가 $2:4:7$ 이고, 최소공배수가 392일 때, 세 자연수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

▷ 정답 : 56

▷ 정답 : 98

해설

세 자연수를 $2 \times x, 4 \times x, 7 \times x$ 라 하면

$$\begin{array}{r} x) \quad 2 \times x \quad 4 \times x \quad 7 \times x \\ 2) \quad \underline{2} \quad \underline{4} \quad \underline{7} \\ \quad \quad 1 \quad \quad 2 \quad \quad 7 \end{array}$$

$$x \times 2 \times 2 \times 7 = 392$$

$$x = 14$$

따라서, 세 자연수는 28, 56, 98이다.

10. 전체집합 $U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ 의 두 부분집합 $A = \{7, 19\}$, $B = \{3, 5, 7, 11, 13\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 모두 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$$A \cup X = X, X \cap (B - A) = \{5, 11\}$$

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4개

해설

$A \cup X = X$ 이므로 $A \subset X$
 $\therefore 7, 19$ 는 X 의 원소
 $B - A = \{3, 5, 11, 13\}$ 이고
 $X \cap (B - A) = \{5, 11\}$ 이므로
 $5, 11$ 은 X 의 원소이고 $3, 13$ 은 X 의 원소가 아니다.
 따라서 X 는 $5, 7, 11, 9$ 를 포함하고 $3, 13$ 은 포함하지 않는 전체집합 U 의 부분집합이므로
 $2^{8-4-2} = 2^2 = 4(\text{개})$

11. 두 집합 $A = \{4, 7, a+1, 2a-2\}$, $B = \{3, a+2, b, 9\}$ 에 대하여 $A - B = \{4, 6\}$ 일 때, $A \cup B$ 를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$A - B = \{4, 6\}$ 이므로
 $4 \in A, 6 \in A$ 이고 $4 \notin B, 6 \notin B, 7 \in B$
 $a+1 = 6$ 또는 $2a-2 = 6$
 (i) $a+1 = 6$ 일 때, $a = 5$
 $A = \{4, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 7, b, 9\}$
 $A - B = \{4, 6\}$ 이려면 $b = 8$
 (ii) $2a-2 = 6$ 일 때, $a = 4$
 $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 6, b, 9\}$
 $6 \notin B$ 이어야 하므로 $a \neq 4$
 $\therefore A = \{4, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 7, 8, 9\}$
 $A \cup B = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

12. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$$\{1, 3\} \subset X \subset A, n(X) = 4$$

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 3개

해설

X 는 원소 $1, 3$ 을 뺀 $\{2, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2개인 부분집합에 원소 $1, 3$ 을 포함시킨 $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$ 의 3개이다.

13. 이진법에서 1 의 자리로부터 왼쪽으로 여섯 번째 자리의 값은 얼마인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 64

해설

$1 \times \times \times \times \times \times_{(2)}$ 에서 1 이 나타내는 자리는 2^6 자리이다. 즉, 64이다.

14. 두 자연수의 곱이 972 이고, 최대공약수가 9 일 때, 차가 가장 작은 두 자연수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

▷ 정답 : 36

해설

두 자연수를 A, B 라 하고 최소공배수를 L 이라 하면 $972 = 9 \times L$ 이므로 $L = 108$

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) A \quad B} \\ a \quad b \end{array}$$

$$9 \times a \times b = 108$$

$$a \times b = 12 \text{ (단, } a, b \text{ 는 서로소)}$$

$$A = 9 \times a, B = 9 \times b \text{ 이고 } A > B \text{ 라 하면}$$

$$a = 12, b = 1 \text{ 또는 } a = 4, b = 3$$

$$(i) a = 12, b = 1 \text{ 일 때}$$

$$A - B = 9 \times 12 - 9 \times 1 = 99$$

$$(ii) a = 4, b = 3 \text{ 일 때}$$

$$A - B = 9 \times 4 - 9 \times 3 = 9$$

따라서, 차가 가장 작은 두 자연수는 27, 36 이다.

15. 360 을 소인수분해하였을 때, 각 소인수의 지수의 합을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 360} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 180} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 90} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 45} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 15} \\ 5 \end{array}$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$\therefore 3 + 2 + 1 = 6$$

16. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = \emptyset$ 이다. $A = \{1, 2, 3\}$ 일 때, $n(B) \times n(C)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = \emptyset \text{ 이면}$$

$$A - B = \emptyset, B - C = \emptyset, C - A = \emptyset,$$

$$A \subset B, B \subset C, C \subset A \text{ 이므로}$$

$$A = B = C$$

$$\text{따라서 } n(B) = n(C) = 3 \text{ 이므로 } n(B) \times n(C) = 9$$

17. 근영이는 이번 생일에 남자친구한테 저금통을 선물받았다. 이 저금통은 비밀번호가 다섯 자리 수로 된 자물쇠가 달려있고 비밀번호는 다음 문제를 풀어야 알 수 있다.

다음 문제를 보고, 비밀번호가 될 수 있는 다섯 숫자를 원소나열법으로 나타내어라.

두 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 4, 6\}$ 에 대하여, 자물쇠의 비밀번호는 집합 A 에서 홀수인 원소와 집합 B 에서 짝수인 원소를 합친 것이다.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

해설

집합 A 에서 홀수인 원소는 1, 3, 집합 B 에서 짝수인 원소는 2, 4, 6이므로 자물쇠의 비밀번호는 1, 2, 3, 4, 6으로 되어있다.

18. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여, $A = \{a, b, d, e\}$, $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \{a, c, f\}$ 일 때, 집합 B 의 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 32개

해설

$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = \{a, c, f\}$$

이때, $a \in A$ 이므로 $B - A = \{c, f\}$

또, $A - ((A - B) \cup (B - A)) = A \cap B$ 이므로,

$$A \cap B = \{b, d, e\} \text{ 이고,}$$

$$(B - A) \cup (A \cap B) = B = \{b, c, d, e, f\}$$

따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개)

19. 집합 $A = \{x | x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 2 \text{의 배수}\}$, $B = \{x | x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 4 \text{의 배수}\}$ 가 있다.

이 때, $X - A = \emptyset$, $X \cap B = \emptyset$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 32개

해설

$$A = \{x | x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 2 \text{의 배수}\}$$

$$= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

$$B = \{x | x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 4 \text{의 배수}\}$$

$$= \{4, 8, 12, 16\}$$

$X - A = \emptyset \Rightarrow X \subset A$, $X \cap B = \emptyset \rightarrow$ 집합 X 는 원소 4, 8, 12, 16을 반드시 포함하지 않는다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2^{9-4} = 32$ (개)

20. $xy1_{(6)}$ 을 십진법의 수로 나타낼 때, 4 진법의 전개식으로 잘못 써서 계산하였더니 원래 수보다 64 만큼 작아졌다. 이 때, $xy1_{(6)}$ 을 십진법의 수로 나타내어라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 121

해설

$$\begin{aligned} xy1_{(6)} &= x \times 6^2 + y \times 6 + 1 \\ xy1_{(6)} \text{ 를 4 진법의 전개식으로 잘못 계산했다면,} \\ xy1_{(6)} &= x \times 4^2 + y \times 4 + 1 \\ \rightarrow x \times 6^2 + y \times 6 + 1 &= x \times 4^2 + y \times 4 + 1 + 64 \\ \rightarrow 20x + 2y &= 64 \\ \rightarrow x, y \text{ 는 6 진법의 수이고 6 보다 항상 작으므로,} \\ x &= 3, y = 2 \\ \therefore 321_{(6)} &= 3 \times 6^2 + 2 \times 6 + 1 \times 1 = 121 \end{aligned}$$

21. 다음 수들의 최대공약수와 최소공배수를 소수의 거듭제곱을 써서 나타낸 것으로 옳은 것은?

$$2^2 \times 3^2 \times 7, 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

[배점 5, 상하]

- ① 최대공약수 : 2×3 , 최소공배수 : $2^2 \times 3^2 \times 7$
 ② 최대공약수 : 2×3 , 최소공배수 : $2 \times 3 \times 5 \times 7$
 ③ 최대공약수 : $2 \times 3 \times 5 \times 7$, 최소공배수 : $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$
 ④ 최대공약수 : $2 \times 3 \times 7$, 최소공배수 : $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$
 ⑤ 최대공약수 : $2 \times 3 \times 7$, 최소공배수 : $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

해설

$$\begin{array}{r} 2^2 \times 3^2 \times 7 \\ 2 \times 3 \times 5 \times 7 \\ \hline \text{최대공약수 : } 2 \times 3 \times 7 \\ \text{최소공배수 : } 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \end{array}$$

22. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 20 이하의 소수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A = \{x | x \leq 7, x \in U\}$ 일 때, $n(A \cap B) = 3$ 을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 64 개

해설

$$\begin{aligned} U &= \{x | x \text{는 20 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}, \\ A &= \{x | x \leq 7, x \in U\} = \{2, 3, 5, 7\}, \\ n(A \cap B) &= 3 \rightarrow \text{집합 } B \text{ 는 } \{2, 3, 5, 7\} \text{ 중에 세 수를 포함하고 나머지 하나는 반드시 포함하지 않는 } U \text{ 의 부분집합이다.} \\ (1) & 2, 3, 5 \text{ 는 반드시 포함하고, } 7 \text{ 은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수는 } 2^{8-3-1} = 16 \text{ (개)} \\ (2) & 2, 3, 7 \text{ 은 반드시 포함하고, } 5 \text{ 는 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수는 } 2^{8-3-1} = 16 \text{ (개)} \\ (3) & 2, 5, 7 \text{ 은 반드시 포함하고, } 3 \text{ 은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수는 } 2^{8-3-1} = 16 \text{ (개)} \\ (4) & 3, 5, 7 \text{ 은 반드시 포함하고, } 2 \text{ 는 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수는 } 2^{8-3-1} = 16 \text{ (개)} \\ \text{따라서 집합 } B \text{ 의 개수는 } & 16 \times 4 = 64 \text{ (개)} \end{aligned}$$

23. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 두 부분집합이 A, B 일 때, 다음 각 조건을 만족하는 집합의 순서쌍 (A, B) 의 개수를 구하여라.

$$(1) A \cap B = \emptyset$$

$$(2) A \cup B = U$$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 개

해설

$A \cap B = \emptyset$ 이고 $A \cup B = U$ 이면 $n(A) + n(B) = n(U) = 4$

$n(A) = 0, n(B) = 4$ 인 경우 : 1 개

$n(A) = 1, n(B) = 3$ 인 경우 : 4 개

$n(A) = 2, n(B) = 2$ 인 경우 : 6 개

$n(A) = 3, n(B) = 1$ 인 경우 : 4 개

$n(A) = 4, n(B) = 0$ 인 경우 : 1 개

따라서 순서쌍 (A, B) 의 개수는 $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ (개)

24. 세 집합 A, B, C 사이에 $A - B = A, B - C = B, C - A = C$ 이 성립한다. 집합 A, B, C 의 부분집합의 개수의 총합이 44 개일 때, $A \cup B \cup C$ 의 원소의 개수를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10 개

해설

$A - B = A, B - C = B, C - A = C$ 이면, A, B, C 중 임의의 두 집합 사이의 교집합은 모두 공집합이다.

그러므로 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$, $n(A) = a, n(B) = b, n(C) = c$ 라고 할 때 $2^a + 2^b + 2^c = 44$,

3 개의 2 의 거듭제곱수의 합이 44 가 되는 경우는 $2^2 + 2^3 + 2^5 = 4 + 8 + 32 = 44$ 의 한 가지 경우 뿐이므로 $a + b + c = 10$

따라서 $n(A \cup B \cup C) = 10$

25. 400 보다 작은 자연수 전체의 집합의 부분집합 $A_k = \{x | x \text{는 } k \text{의 배수}\}$, $B = \{x | x \in A_5, x \notin A_2, x \notin A_3, x \notin A_4\}$ 에 대하여 $n(B)$ 를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$B = \{x | x \in A_5, x \notin A_2, x \notin A_3, x \notin A_4\}$ 를 보면,

B 의 원소는 5 의 배수이면서, 2, 3, 4 의 배수가 아닌 수이다.

$A_4 \subset A_2$ 이므로, B 의 원소는 결국 5 의 배수이면서 2, 3 의 배수가 아닌 수이다.

$$\therefore n(B)$$

$$= n(A_5) - n(A_2 \cap A_5) - n(A_3 \cap A_5)$$

$$+ n(A_2 \cap A_3 \cap A_5)$$

$$= 80 - 40 - 26 + 13 = 27$$