단원 종합 평가

1. 다음 보기 중 집합이 아닌 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 8월에 태어난 학생의 모임

㉡ 달리기를 잘하는 학생의 모임

㉢ 외떡잎 식물의 모임

㉣ 키우기 좋은 동물의 모임

㉤ 우리 회사에서 여동생이 있는 사람의 모임

㉥ 위인의 모임

㉦ 10보다 큰 11의 배수

㉧ 강남구 소속 주민의 모임

[배점 3, 중하]

① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉡, ㉢, ㉣ ③ ㉢, ㉣, ㉤

④ ㉡, ㉣, ㉧ ⑤ ㉡, ㉣, ㉥

해설

㉡ '잘하는'이라는 단어는 개인에 따라 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

㉣ '좋은'이라는 단어는 개인에 따라 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

㉥ '위인'이라는 그 기준이 명확하지 않으므로 집합이 될 수 없다.

2. $A = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$, $B = \{x \mid x$는 10 이하의 짝수 $\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2 개) [배점 4, 중중]

① $A \subset B$ ② $10 \in B$ ③ $\varnothing \subset A$

④ $2 \subset B$ ⑤ $7 \in B$

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

① $B \subset A$

④ $2 \in B$

⑤ $7 \notin B$

3. 서로 맞물려 돌아가는 두 톱니바퀴 A, B의 톱니의 수는 각각 36개, 60개이다. 톱니바퀴 A가 한 번 회전하는데 7분이 걸린다고 할 때, 두 톱니가 같은 이에서 처음으로 맞물리는 때는 회전을 시작하고 몇 분 후인지 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 35분 후

해설

다시 맞물릴 때까지 돌아간 톱니의 개수는 36, 60의 최소공배수인 180개이므로, 톱니바퀴 A는 $180 \div 36 = 5$(번) 회전해야 한다. 따라서 두 톱니바퀴가 다시 맞물리는 때는 $5 \times 7 = 35$(분) 후이다.

4. 두 수 $2^a \times 3^3 \times 5^2 \times 7^c$, $2^4 \times 5^b \times 7^5 \times 11^4$ 의 최대공약수가 280 일 때, $a+b+c$ 의 값은? [배점 4, 중중]

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

최대공약수가 $280 = 2^3 \times 5 \times 7$ 이고
$2^4 \times 5^b \times 7^5 \times 11^4$ 에서 2 의 지수가 4이므로
$2^a \times 3^3 \times 5^2 \times 7^c$ 에서 2 의 지수가 3 이어야 한다.
같은 방식으로
$2^a \times 3^3 \times 5^2 \times 7^c$ 에서 5 의 지수가 2 이므로
$2^4 \times 5^b \times 7^5 \times 11^4$ 에서 5 의 지수가 1 이어야 한다.
또한,
$2^4 \times 5^b \times 7^5 \times 11^4$ 에서 7 의 지수가 5 이므로
$2^a \times 3^3 \times 5^2 \times 7^c$ 에서 7 의 지수가 1이어야 한다.
따라서 $a = 3,\ b = 1,\ c = 1$ 이다.

5. 어떤 세 자연수의 비가 2 : 3 : 4 이고 최대공약수가 6 일 때, 세 자연수의 최소공배수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$a)\underline{2 \times a \quad 3 \times a \quad 4 \times a}$
$2)\underline{\quad 2 \quad\quad 3 \quad\quad 4 \quad}$
$\quad 1 \quad\quad 3 \quad\quad 2$
최대공약수는 $a = 6$ 이고,
최소공배수는 $a \times 2^2 \times 3 = 6 \times 2^2 \times 3 = 72$ 이다.

6. 어떤 자연수로 38을 나누면 2가 남고, 27을 나누면 3이 남고, 125로 나누면 5가 남는다고 한다. 이러한 자연수 중에서 가장 큰 수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$38-2 = 36,\ 27-3 = 24,\ 125-5 = 120$에서 어떤 수는 36, 24, 120의 최대 공약수이다.
$6)\underline{\ 36 \quad 24 \quad 120\ }$
$2)\underline{\ \ 6 \quad\ 4 \quad 20\ \ }$
$\quad\ 3 \quad\ 2 \quad 10$
최대공약수 : $6 \times 2 = 12$

7. $abc110_{(2)}$을 8로 나누었을 때, 나머지를 십진법으로 나타내어라.

[배점 5, 중상]

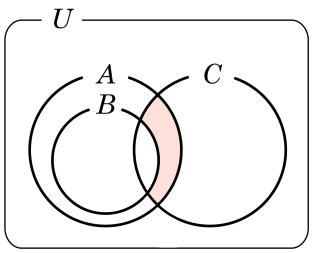
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$abc110_{(2)}$
$= a \times 2^5 + b \times 2^4 + c \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2$
$= 2^3 \times (a \times 2^2 + b \times 2 \times c) + 1 \times 2^2 + 1 \times 2$
$\therefore$ (나머지) $= 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 4 + 2 = 6$

8. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



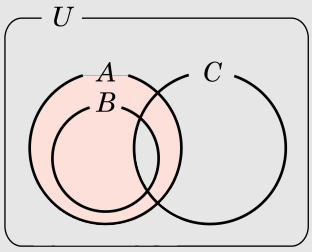
[배점 5, 중상]

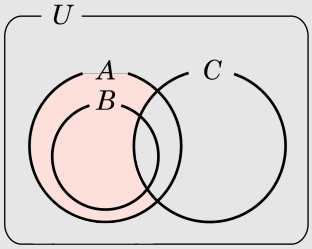
① $A-(B\cap C)$ ② $(A-B)\cap C$

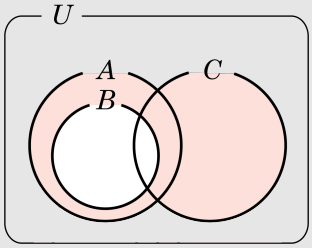
③ $(A\cup B)-C$ ④ $(A\cup C)-B$

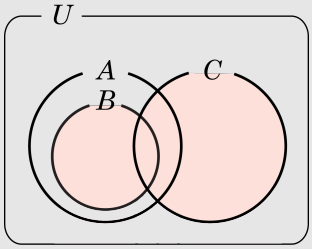
⑤ $(A\cap B)\cup C$

해설

① 

③ 

④ 

⑤ 

9. 다음 보기의 밑줄 친 것 중에서 기준이 명확한 것은 몇 개인가?

보기

㉠ 우리 반에서는 100 m를 잘하는 학생들을 뽑아 방과 후에 1시간씩 달리기 연습을 한다.

㉡ 우리 반에서 인기가 좋은 학생을 반장 후보로 세울 것이다.

㉢ 운동을 잘하는 학생은 집중력이 좋다.

㉣ 평균이 85점 이상인 학생은 우등생이다.

㉤ 월드컵 성적이 비교적 좋은 나라들의 모임

㉥ 영토가 아름다운 국가의 모임

㉦ 10에 가장 가까운 자연수의 모임

[배점 5, 중상]

① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ '잘하는' 이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.

㉡ '좋은' 이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

㉢ '잘하는' 이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.

㉤ '비교적' 이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

㉥ '아름다운' 은 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

10. $24 \times a$ 가 어떤 자연수 A의 제곱이 될 때, A 의 최솟값은? [배점 5, 상하]

① 9 ② 12 ③ 36
④ 54 ⑤ 100

해설

$24 \times a = 2^3 \times 3 \times a$
가장 작은 $a = 2 \times 3 = 6$
$A^2 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = (12)^2$
$\therefore A = 12$

11. $n(A) = 3$ 인 집합 A 에 대하여 집합 $P = \{X | X \subset A\}$ 일 때, 집합 P 의 부분집합 중 공집합을 뺀 나머지의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 255 개

해설

집합 P 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 가지므로
$n(P) = 2^3 = 8$,
따라서 집합 P 의 부분집합 중 공집합을 뺀 나머지의 개수는 $2^8 - 1 = 255$ (개)

12. 흰 바둑돌을 0 , 검은 바둑돌을 1 로 하여 이진법의 수를 나타낼 수 있다. 흰 바둑돌 2 개와 검은 바둑돌 3 개로 나타낼 수 있는 다섯 자리 이진수의 총합을 십진수로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 141

해설

다섯 자리 이진수이므로 첫 자리는 항상 검은 바둑돌이 와야 한다.
따라서 나타낼 수 있는 이진법의 수는
$11100_{(2)}$, $11010_{(2)}$, $11001_{(2)}$, $10110_{(2)}$, $10101_{(2)}$, $10011_{(2)}$ 이다.
위의 수를 십진법의 수로 나타내면, $28, 26, 25, 22, 21, 19$ 이다.
이진법의 수의 총합은 십진법의 수로 고쳐서 총합을 구할 때와 같다.
$\therefore 28 + 26 + 25 + 22 + 21 + 19 = 141$

13. 4719 를 3 개의 자연수의 곱으로 나타내는 모든 방법의 수를 구하여라. (단, $x \times y \times z$ 와 $x \times z \times y$ 와 같이 곱하는 순서만 다른 식도 서로 다른 방법이다.)
[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 12 가지

해설

$4719 = 3 \times 1573 = 3 \times 11 \times 143 = 3 \times 11 \times 11 \times 13$

따라서,

4719 를 3 개의 자연수의 곱으로 나타내는 모든 방법의 수

ⅰ) (3, 11, 13)

3 개의 인수를 나열하는 방법의 수 $= 3 \times 2 = 6$

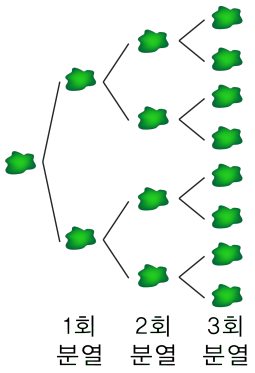
ⅱ) (3, 11, 11), (11, 11, 13)

3 개의 인수를 나열하는 방법의 수 $= 3$

$3 \times 2 = 6$

$\therefore\ 6 + 6 = 12$(가지)

14. 아메바는 둘로 분열하는 과정을 통해 번식을 한다. 아메바가 한 마리가 다음 그림과 같이 분열을 반복할 때, 전체 아메바가 50 마리 이상이 되려면 아메바가 최소 몇 회 분열을 하여야 하는가? (단, 아메바는 각각 한 번씩만 분열하는 것으로 가정한다.)



[배점 6, 상중]

① 4 회 ② 5 회 ③ 6 회

④ 7 회 ⑤ 8 회

해설

아메바 한 마리가 1 회 분열을 하면 2 마리가 생성되어 전체 아메바는 $1 + 2 = 3$ (마리)가 된다.

아메바는 각각 한 번씩만 분열하므로 2 회 분열에서는 새로 생성된 2 마리만 각자 분열을 하여 $2 \times 2 = 4$ (마리) 가 더 생성된다. 따라서 총 마리 수는 $1 + 2 + 2^2 = 7$ (마리)가 된다. 그 다음 3 회 분열을 하면 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15$ (마리)가 된다.

이런 방식으로 분열이 진행될 때마다의 총 마리수를 표로 정리하면 다음과 같다.

분열	총 마리 수(마리)
1회 분열	3
2회 분열	7
3회 분열	15
4회 분열	31
5회 분열	63
⋮	⋮

따라서 최소 5 회 분열을 해야 아메바의 총 마리수가 50 마리 이상이 된다.

15. $n!$ 은 1 부터 n 까지 모든 자연수의 곱을 말한다. 18! 을 이진법의 수로 나타내었을 때, 일의 자리에서 왼쪽으로 연속되는 0 의 갯수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 개

해설

18! 를 2 의 지수로 묶어보면,

18!

$= 1\times2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times9\times(2\times5)\times11$

$\times(2^2\times3)\times13\times(2\times7)\times15\times2^4\times17\times(2\times9)$

$= m\times2^{16}$

$\rightarrow m$ 은 홀수이므로, 17 번째 자리의 수는 반드시 1 이다.

따라서 일의 자리에서 왼쪽으로 연속되는 0 의 갯수는 16 개이다.