

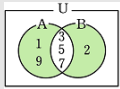
단원 종합 평가

1. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 의 두 부분집합 A, B 는 다음과 같다. $A = \{x|x \text{는 홀수}\}$, $B = \{x|x \text{는 소수}\}$ 일 때, $(A - B) \cup (B - A)$ 의 원소의 총합을 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설



$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 9\}$$

$$\therefore 1 + 2 + 9 = 12$$

2. 전체집합이 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은? [배점 3, 하상]

- ① 조건 ' $x^2 - 6x + 8 = 0$ '의 진리집합은 $\{2, 3\}$ 이다.
- ② 조건 ' x 는 소수이다.'의 진리집합은 $\{1, 3, 5\}$ 이다.
- ③ 조건 ' x 는 4의 약수이다.'의 진리집합은 $\{0, 1, 2, 4\}$ 이다.
- ④ 조건 ' $0 \leq x < 4$ 이고 $x \neq 2$ 이다.'의 진리집합은 $\{0, 1, 3\}$ 이다.
- ⑤ 조건 ' x 는 6의 약수이다.'의 진리집합은 $\{1, 2, 3\}$ 이다.

해설

- ① $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ 또는 $x = 4$, 따라서, 진리집합은 $\{2, 4\}$
- ② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2, 3, 5\}$
- ③ 4의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1, 2, 4\}$
- ④ $x = 0, 1, 2, 3$ 이고 $x \neq 2$ 이므로 진리집합은 $\{0, 1, 3\}$
- ⑤ 전체집합이 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고 6의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1, 2, 3, 6\}$

3. 두 집합 A, B 가 각각 공집합이 아닐 때, <보기>에서 서로소인 것은 모두 몇 개인가?

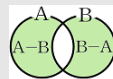
보기

- ㉠ A 와 $A \cup B$
- ㉡ $A - B$ 와 B
- ㉢ $B - A$ 와 A
- ㉣ $A - B$ 와 $B - A$

[배점 3, 중하]

- ① 없다.
- ② 1개
- ③ 2개
- ④ 3개
- ⑤ 4개

해설



㉠, ㉡, ㉢ 3개이다.

4. $p: |x-a| \leq 1$, $q: |x-2| \leq 3$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a 의 값을 정할 때, a 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 하자. 이 때, $M+m$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

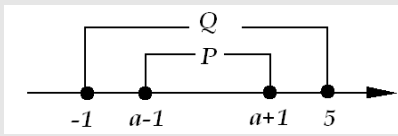
▶ 답:

▶ 정답: 4

해설

$$P = \{x | a-1 \leq x \leq a+1\}, Q = \{x | -1 \leq x \leq$$

$$5\}, P \subset Q$$



$$-1 \leq a-1 \rightarrow 0 \leq a, a+1 \leq 5 \rightarrow a \leq 4$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 4 \text{ 이므로 } M=4, m=0$$

$$\therefore M+m=4$$

5. 다음 보기의 명제 중 참인 것을 모두 고르면?

- ㉠ $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.
- ㉡ 정사각형은 마름모이다.
- ㉢ 임의의 유리수 x 에 대하여 $\sqrt{2}x$ 는 무리수이다.
- ㉣ $a+b > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이다.
- ㉤ x 가 6의 약수이면 x 는 12의 약수이다.

[배점 3, 중하]

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉡, ㉢
- ③ ㉢, ㉣
- ④ ㉡, ㉤
- ⑤ ㉣, ㉤

해설

$$(반례) \textcircled{1} a=1, b=-4 \textcircled{3} x=0 \textcircled{4} a=5, b=-4$$

$\therefore$ ㉡, ㉤만 참이다.

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $B \cap A^c = \emptyset$ 를 만족할 때, 다음 보기 중에서 틀린 것을 모두 고르면?

[배점 4, 중중]

- ① $A = B$
- ② $B - A = \emptyset$
- ③ $A^c \subset B^c$
- ④ $B^c \cup A = U$
- ⑤ $A \cup B^c = \emptyset$

해설

$$B \cap A^c = B - A = \emptyset \therefore B \subset A$$

7. 학생수가 40명인 어느 학급에서 두 종류의 치약 A, B 를 사용한 학생 수를 조사하니 각각 24명과 32명이다. 두 종류의 치약을 모두 사용한 학생 수는 최소 몇 명인가? [배점 4, 중중]

- ① 10명
- ② 12명
- ③ 14명
- ④ 15명
- ⑤ 16명

해설

$$\begin{aligned} n(U) &= 40, n(A) = 24, n(B) = 32, n(A \cup B) = \\ n(A) + n(B) - n(A \cap B) &\leq 40 = 24 + 32 - \\ n(A \cap B) &\leq 40 \\ \therefore n(A \cap B) &\geq 16 \end{aligned}$$

8. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합을 P_A 라 하고, 집합 $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합을 P_B 라 하자. $n(P_A - P_B)$ 의 값은? [배점 4, 중중]

- ① 31 ② 32 ③ 47 ④ 48 ⑤ 56

해설

$$\begin{aligned} n(P_A - P_B) &= n(P_A) - n(P_A \cap P_B) = n(P_A) - \\ n(P_{A \cap B}) &= n(P_A) - \{3, 4, 5, 6\} \text{의 부분집합의} \\ \text{개수} &= 2^6 - 2^4 = 48 \end{aligned}$$

9. 다음 명제 중 p 가 q 이기 위한 필요조건인 것은? (a, b, x, y 는 실수) [배점 4, 중중]

- ① $p: a > 3 \quad q: a^2 > 9$
 ② $p: x$ 는 3의 배수 $q: x$ 는 6의 배수
 ③ $p: x = 1$ 이고 $y = 1 \quad q: x + y = 2$ 이고 $xy = 1$
 ④ $p: |x - 1| = 2 \quad q: x^2 - 2x + 3 = 0$
 ⑤ $p: a < b \quad q: |a| < |b|$

해설

$q \Rightarrow p$ 즉 $Q \subset P$ 인 것을 고른다.
 ② $q: x$ 는 6의 배수 $\Rightarrow p: x$ 는 3의 배수 (참)

10. 두 조건 $p(x): |x - a| \leq 1, q(x): -1 < x < 2, 3 \leq x \leq 5$ 에 대하여 $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건일 때, 정수 a 의 개수는? [배점 4, 중중]

- ① 5개 ② 4개 ③ 3개
 ④ 2개 ⑤ 1개

해설

두 조건 $p(x), q(x)$ 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $P = \{x | a - 1 \leq x \leq a + 1\}, Q = \{x | -1 < x < 2, 3 \leq x \leq 5\}$ $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q$ 이어야 하므로
 (i) $-1 < a - 1$ 이고 $a + 1 < 2$, 즉 $0 < a < 1 \dots \text{㉠}$
 (ii) $3 \leq a - 1$ 이고 $a + 1 \leq 5$, 즉 $a = 4 \dots \text{㉡}$
 ㉠, ㉡에서 정수 a 는 4뿐이므로 1개이다.

11. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 집합연산이 옳지 않은 것은? [배점 5, 중상]

- ① $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$
 ② $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$
 ③ $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$
 ④ $(A \cup C) - (B \cup C) = A - (B \cup C)$
 ⑤ $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cup C)$

해설

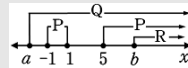
- ① (좌변) $= (A - B) \cup (A - C)$
 $= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$ ($\because$ 차집합의 성질)
 $= A \cap (B^c \cup C^c)$
 $= A \cap (B \cap C)^c$ ($\because$ 분배법칙과 드 모르간의 법칙)
 $= A - (B \cap C)$
 $=$ 우변 ($\because$ 차집합의 성질)
- ② (우변) $= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$
 $= (A \cup B) - (A \cap B)$ ($\because$ 차집합의 성질)
 벤다이어그램을 그려보면 좌변과 같음을 확인할 수 있다.
- ③ (좌변) $= (A - C) \cup (B - C)$
 $= (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)$ ($\because$ 차집합의 성질)
 $= (A \cup B) \cap C^c$
 $= (A \cup B) - C$ (우변) ($\because$ 분배법칙과 차집합의 성질)
- ④ 좌변 $= (A \cup C) - (B \cup C)$
 $= (A \cup C) \cap (B \cup C)^c$ ($\because$ 차집합의 성질)
 $= [A \cap (B \cup C)^c] \cup [C \cap (B \cup C)^c]$ ($\because$ 분배법칙)
 $= [A \cap (B \cup C)^c] \cup [C \cap (B^c \cap C^c)]$ ($\because$ 드 모르간의 법칙)
 $= [A \cap (B \cup C)^c] \cup \emptyset$
 $= A \cap (B \cup C)^c$
 $= A - (B \cup C)$ (우변)
- ⑤ 좌변 $= A - (B - C) = A \cap (B \cap C^c)^c$
 $= A \cap (B^c \cup C)$ ($\because$ 차집합의 성질과 드 모르간의 법칙)
 $= (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$
 $= (A - B) \cup (A \cap C) \neq$ 우변 $\rightarrow$ 모두를 벤다이어그램을 그려서 비교할 수 있다.

12. 조건 p, q, r 을 만족시키는 집합을 각각 P, Q, R 라고 할 때, $P = \{x | -1 \leq x \leq 1, x \geq 5\}$, $Q = \{x | x \geq a\}$, $R = \{x | x \geq b\}$ 이다. 이 때, 조건 q 는 p 이기 위한 필요조건이고, 조건 r 은 p 이기 위한 충분조건이면 a 의 최댓값과 b 의 최솟값은? [배점 5, 중상]

- ① a 의 최댓값 1, b 의 최솟값 -1
 ② a 의 최댓값 -1, b 의 최솟값 1
 ③ a 의 최댓값 5, b 의 최솟값 -1
 ④ a 의 최댓값 -1, b 의 최솟값 5
 ⑤ a 의 최댓값 5, b 의 최솟값 -5

해설

$p \rightarrow q$, 즉 $P \subset Q$ 이면
 q 는 p 이기 위한 필요조건,
 $r \rightarrow p$, 즉 $R \subset P$ 이면
 r 은 p 이기 위한 충분조건이므로
 $P \subset Q, R \subset P$ 가 되는 a, b 를 정할 수 있다.
 문제의 조건을 만족시키도록 집합 P, Q, R 를 수직선 위에 나타내면



따라서, $a \leq -1, b \geq 5$
 $\therefore a$ 의 최댓값 -1, b 의 최솟값 5

13. 다음 중 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은? (단, A^c 는 전체집합 U 에 대한 A 의 여집합) [배점 5, 중상]

- ① $A = B$ ② $B \subset A$
 ③ $A \subset B$ ④ $A \cap B = \emptyset$
 ⑤ $A \cup B = \emptyset$

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A - B) \cup (B - A)$ 따라서 $(A - B) \cup (B - A) = B \cap A^c$ 에서 $(A - B) \cup (B - A) = B - A$ 가 성립하려면 $(A - B) \subset (B - A)$ 이어야 하는데 $A - B$ 와 $B - A$ 는 서로소이므로 $A - B = \emptyset \therefore A \subset B$

14. 다음 중 두 조건 p, q 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가?

- ㉠ $p: xy = |xy| \quad q: x > 0, y > 0$
 ㉡ $p: xy + 1 > x + y > 2 \quad q: x > 1, y > 1$
 ㉢ $p: xy = 0 \quad q: |x - y| = |x + y|$
 ㉣ $p: |x| + |y| > |x + y| \quad q: x + y \geq 2$
 ㉤ $p: x \geq 1, y > 1 \quad q: x + y \geq 2$
 ㉥ $p: x + y = 0, xy = 0 \quad q: x = 0, y = 0$
 ㉦ $p: x + y\sqrt{2} = 0 \quad q: x = y = 0$ (x, y 는 유리수)
 ㉧ $p: |x| = |y| \quad q: x^2 = y^2$

[배점 5, 상하]

- ① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개
 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

㉡ ㉢ ㉣ ㉤ ㉧

15. 두 조건 p, q 를 만족시키는 집합 $P = \{x | a < x < a+1\}$, $Q = \{x | x + \frac{1}{x} \leq -2\}$ 에 대하여 $p \rightarrow q$ 를 참이 되게 하는 실수 a 의 최댓값을 구하면? [배점 5, 상하]

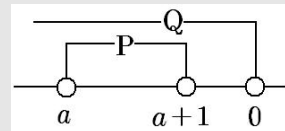
- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(i) $x < 0$ 이면 $x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{(x+1)^2}{x} \leq 0 \therefore x + \frac{1}{x} \leq -2$

(ii) $x > 0$ 이면 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 이므로 Q 를 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $Q = \{x | x < 0\}$
 $\therefore P \subset Q \Leftrightarrow a+1 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -1$



따라서, $p \rightarrow q$ 를 참이 되게 하는 실수 a 의 최댓값은 -1이다.