

단원 종합 평가

1. 두 집합 $A = \{1, 3, x^2 + 4x\}$, $B = \{1, 2x, x^2 + 1\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{-4, 1\}$ 일 때, 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은? [배점 3, 중하]

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$A \cap B = \{-4, 1\}$ 이므로 $x^2 + 4x = -4(x+2)^2 = 0$
 $\therefore x = -2$
 $A = \{1, 3, -4\}$, $B = \{1, -4, 5\}$ 이다.
 $\therefore A \cup B = \{1, 3, 5, -4\} \Rightarrow 1+3+5+(-4) = 5$

2. 명제 'p(x) 이면 q(x) 가 아니다'가 참일 때, 두 집합 $P = \{x|p(x)\}$, $Q = \{x|q(x)\}$ 사이의 관계로 다음 중 옳은 것은? [배점 3, 중하]

- ① $P \subset Q$ ② $Q \subset P$
 ③ $P \subset Q^c$ ④ $Q^c \subset P$
 ⑤ $P \cup Q = P$

해설

'q 가 아니다'를 만족시키는 집합은 Q^c
 따라서 'p이면 q가 아니다'가 참이면 $P \subset Q^c$

3. 다음 <보기1>의 명제와 <보기2>의 명제가 서로 밀접한 관계가 있는 것끼리 옳게 짝지어진 것을 고르면?

보기1

- I. 임의의 집합 A, B 에 대해 항상 성립한다.
 II. $A \subset B$ 와 동치이다.
 III. $A \cap B = \phi$ 와 동치이다.

보기2

- 가. $A \cap (A \cup B) = A$
 나. $A \cap B = A$
 다. $A \cap B^c = A$

[배점 3, 중하]

- ① I-가, II-나, III-다
 ② I-가, II-다, III-나
 ③ I-나, II-가, III-다
 ④ I-나, II-다, III-가
 ⑤ I-다, II-가, III-나

해설

- I. 임의의 집합 A, B 에 대하여 $A \subset (A \cup B) \therefore A \cap (A \cup B) = A$ 따라서, I-가
 II. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$ 따라서, II-나
 III. $A \cap B^c = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$ 따라서, III-다

4. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\{(A \cap B) \cup (A - B)\} \cap B$ 를 간단히 정리하면? [배점 4, 중중]

- ① A ② B ③ $\emptyset$
 ④ $A \cup B$ ⑤ U

해설

$A \subset B$ 이므로 $A \cap B = A$, $A - B = \emptyset$ 따라서,
(준식) $= (A \cup \emptyset) \cap B = A \cap B = A$

5. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $B \cap A^c = \emptyset$ 를 만족할 때, 다음 보기 중에서 틀린 것을 모두 고르면?
[배점 4, 중중]

- ① $A = B$ ② $B - A = \emptyset$
③ $A^c \subset B^c$ ④ $B^c \cup A = U$
⑤ $A \cup B^c = \emptyset$

해설

$B \cap A^c = B - A = \emptyset \quad \therefore B \subset A$

6. 두 집합 $A = \{2, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 에 대하여 $A \subset X, X \subset B$ 이고 $X \neq A, X \neq B$ 를 동시에 만족하는 집합 X 의 개수는?
[배점 4, 중중]

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

집합 X 는 $A \subset X, X \subset B$ 에서 $\{2, 4\}$ 는 무조건 포함하므로, 그것을 제외한 $\{6, 8, 10, 12\}$ 의 부분집합의 개수와 같다. $\therefore 2^4 = 16$
여기서 $X = A, X = B$ 인 경우를 뺀다
 $\therefore 16 - 2 = 14$

7. 등식 $(A - B) - C = A - (B \cup C)$ 를 증명하는 데 꼭 필요한 것을 다음 중에서 모두 고르면?

- ㉠ 교환법칙
㉡ 결합법칙
㉢ 분배법칙
㉣ 흡수법칙
㉤ 드 모르간의 법칙
㉥ $X - Y = X \cap Y^c$

[배점 5, 중상]

- ① ㉠, ㉡, ㉢, ㉤ ② ㉠, ㉡, ㉢, ㉤
③ ㉢, ㉣, ㉤ ④ ㉡, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$(A - B) - C = (A \cap B^c) - C \cdots \text{㉤}$
 $= (A \cap B^c) \cap C^c \cdots \text{㉤}$
 $= A \cap (B^c \cap C^c) \cdots \text{㉡}$
 $= A \cap (B \cup C)^c \cdots \text{㉤}$
 $= A - (B \cup C) \cdots \text{㉤}$

8. 다음 보기 중에서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가? (단 x, y 는 실수이다.)

- ㉠ $p : -1 < x < 1$ $q : x < 3$
 ㉡ $p : |x - 1| = 2$ $q : x^2 - 2x + 3 = 0$
 ㉢ $p : x^2 + y^2 = 0$ $q : xy = 0$
 ㉣ $p : A^c \cup B = U$ $q : A \subset B$
 ㉤ $p : |x| = 1$ $q : x = 1$

[배점 5, 중상]

- ㉠ 1개 ㉡ 2개 ㉢ 3개
 ㉣ 4개 ㉤ 5개

해설

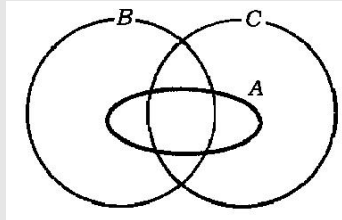
- ㉠ p 는 q 이기 위한 충분조건만 된다.
 ㉡ p 는 q 이기 위한 아무 조건도 아니다.
 ㉢ p 는 q 이기 위한 충분조건만 된다.
 ㉣ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
 즉, $A^c \cup B = U$ 와 $A \subset B$ 은 동치이다.
 ㉤ p 는 q 이기 위한 필요조건만 된다. $\therefore$ 1개

9. x, y 가 실수이고 A, B, C 를 집합이라 할 때 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요충분조건은? [배점 5, 중상]

- ㉠ $p : x + y \geq 2, q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$
 ㉡ $p : |x| + |y| = 0, q : 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$
 ㉢ $p : xy + 1 > x + y > 2, q : x > 1$ 이고 $y > 1$
 ㉣ $p : A \subset B \subset C, q : A \subset B$ 또는 $A \subset C$
 ㉤ $p : x + y$ 가 유리수이다. $q : x, y$ 모두 유리수이다.

해설

- ㉠ $x + y \geq 2$ $x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (충분조건) (반례 : $x = 3, y = -3$)
 ㉡ $|x| + |y| = 0 \Rightarrow 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$, 여기서 $|x| + |y| = 0$ 은 $x = 0, y = 0$ 과 같으므로 $x = 0, y = 0 \rightarrow 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$ (충분조건) (반례 : $x = 8, y = -8$)
 ㉢ $xy + 1 > x + y > 2 \Leftrightarrow x > 1$ 이고 $y > 1$
 ㉣ $A \subset B \subset C \Leftarrow A \subset B$ 또는 $A \subset C$ (충분조건)



- ㉤ $x + y$ 가 유리수이다. $\Leftarrow x, y$ 모두 유리수이다. (필요조건) (반례 : $x = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}$)

10. 두 조건 p, q 가 $p : |x| < a, q : |x - 1| \geq 3$ 과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참일 때, 양수 a 의 범위를 구하면? [배점 5, 중상]

- ㉠ $0 < a \leq 4$ ㉡ $a > 4$ ㉢ $a \geq 4$
 ㉣ $a > 2$ ㉤ $2 \leq a \leq 4$

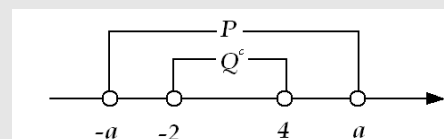
해설

$$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow Q^c \subset P$$

$$P = \{x \mid -a < x < a\}$$

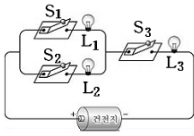
$$Q = \{x \mid x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 4\}$$

$$Q^c = \{x \mid -2 < x < 4\}$$



$$-a \leq -2 \rightarrow a \geq 2, a \geq 4 \therefore a \geq 4$$

11. 아래 그림과 같은 스위치 회로에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

- ㉠ 스위치 S_1, S_2, S_3 가 모두 닫히는 것은 전구 L_1 이 켜지기 위한 충분조건이다.
- ㉡ 스위치 S_2 와 S_3 가 모두 닫히는 것은 전구 L_3 가 켜지기 위한 필요조건이다.
- ㉢ 스위치 S_2 또는 S_3 가 닫히는 것은 전구 L_2 와 L_3 가 모두 켜지기 위한 필요충분 조건이다.

[배점 5, 중상]

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
- ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉡ 충분 ㉢ 관계성립하는 경우가 아님

12. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고 A 는 1 을 포함하는 X 의 부분집합이고 B 는 5 를 포함하는 X 의 부분집합일 때, $A \cup B$ 의 원소의 개수는? [배점 5, 상하]

- ① 32 ② 40 ③ 48 ④ 50 ⑤ 52

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, $n(A) = 2^5$, $n(B) = 2^5$ $n(A \cap B)$ 는 1, 5 를 모두 포함하는 X 의 부분집합의 개수이므로 $n(A \cap B) = 2^4$
 $\therefore n(A \cup B) = 2^5 + 2^5 - 2^4 = 48$

13. 집합 $2^M = P(M) = \{X | X \subset M\}$ 이라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

- ㉠ $n(M) = k$ 이면 $n(P(M)) = 2^k$
- ㉡ $A = \{a, b\}$ 이면 $P(A)$ 의 부분집합의 수는 16 개이다.
- ㉢ $P(\phi) = \{\phi\}$
- ㉣ $P(P(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$
- ㉤ $P(\{1\})$ 의 부분집합은 $\phi, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\phi, \{1\}\}$

[배점 5, 상하]

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
- ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠ $P(M)$ 은 M 의 부분집합들을 원소로 하는 집합이므로 옳다.
 ㉡ $n(P(A)) = 4$ 이므로 $P(A)$ 의 부분집합의 수는 $2^4 = 16$ (개)이다.
 ㉢ $P(\phi) = \{X | X \subset \phi\} = \{\phi\}$
 ㉣ $P(\phi)$ 의 부분집합은 $\phi, \{\phi\}$ 이므로 $P(P(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$
 ㉤ $P(\{1\}) = \{X | X \subset \{1\}\} = \{\phi, \{1\}\}$ 이므로 $P(\{1\})$ 의 부분집합은 $\phi, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\phi, \{1\}\}$

14. 자연수를 원소로 하는 집합 S 가 ‘ $x \in S$ 이면 $8-x \in S$ 이다.’를 만족시킬 때, 집합 S 의 개수는 ?

[배점 5, 상하]

- ① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

$x, 8-x$ 는 자연수이므로 $1 \leq x \leq 7$ 이고
 $x = 1$ 이면 $x = 7, x = 2$ 이면 $x = 6, x = 3$ 이면 $x = 5, x = 4$ 이면 $x = 4$ 이다.

㉠) 원소가 1개인 집합 : {4} $\Rightarrow$ 1개

㉡) 원소가 2개인 집합 :

{1, 7}, {2, 6}, {3, 5} $\Rightarrow$ 3개

㉢) 원소가 3개인 집합 :

{1, 7, 4}, {2, 6, 4}, {3, 5, 4} $\Rightarrow$ 3개

㉣) 원소가 4개인 집합 :

{1, 7, 2, 6}, {2, 6, 3, 5}, {3, 5, 1, 7} $\Rightarrow$ 3개

㉤) 원소가 5개인 집합 :

{1, 7, 2, 6, 4}, {2, 6, 3, 5, 4}, {3, 5, 1, 7, 4} $\Rightarrow$ 3개

㉥) 원소가 6개인 집합 :

{1, 7, 2, 6, 3, 5} $\Rightarrow$ 1개

㉦) 원소가 7개인 집합 :

{1, 7, 2, 6, 3, 5, 4} $\Rightarrow$ 1개

$\therefore$ 15개

15. 집합 M 을 $M = \{3a + 5b | a, b \text{는 음이 아닌 정수}\}$ 로 정의할 때, 다음 중 옳은 것은?

㉠ $89 \in M, 97 \in M$

㉡ $K \in M \Rightarrow K + 3 \in M$

㉢ 두 자리의 모든 자연수는 M 의 원소이다.

[배점 6, 상중]

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

- ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $89 = 9 + 80 = 3 \times 3 + 5 \times 16 \in M$

$97 = 27 + 70 = 3 \times 9 + 5 \times 14 \in M$

㉡ $3a + 5b = K$ 라 하면

$K + 3 = 3(a + 1) + 5b \in M$

㉢ $10 = 3 \times 0 + 5 \times 2$

$11 = 3 \times 2 + 5 \times 1$

$12 = 3 \times 4 + 5 \times 0$

$13 = 3 \times 1 + 5 \times 2$

$14 = 3 \times 3 + 5 \times 1$

이므로 15이후의 자연수는 $10 + 5 = 15, 11 + 5 = 16, 12 + 5 = 17, 13 + 5 = 18, 14 + 5 = 19 \dots$ 의 꼴로 표현이 가능하다. 따라서 두 자리의 모든 자연수는 M 의 원소이다.