

단원 종합 평가

1. 35명의 학생이 영어와 수학 중 적어도 한 과목을 신청해야 한다. 영어를 신청한 학생이 25명, 수학을 신청한 학생이 28명일 때, 수학만 신청한 학생수를 구하면?
[배점 3, 중하]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

영어를 신청한 학생의 집합을 A, 수학을 신청한 학생의 집합을 B라 하면
 $\Rightarrow n(A \cup B) = n(U) = 35$
 $\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $n(A \cap B) = 18$
 $\therefore$ 수학만 신청한 학생수 = $28 - 18 = 10$

2. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 50$, $n(A) = 35$, $n(A^c \cap B^c) = 7$ 일 때, $n(B - A)$ 를 구하시오.
[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 8

해설

$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 7$
 $n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 50 - 7 = 43$
 $n(B - A) = n(A \cup B) - n(A) = 43 - 35 = 8$

3. 두 집합 A, B 에 대하여 연산 $\triangle, \square$ 을 $A \triangle B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, $A \square B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ 로 정의한다. $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 1\}$ 일 때, $n((A \triangle B) - (A \square B))$ 는?
[배점 4, 중중]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

연산 $\triangle, \square$ 에 대하여 원소를 각각 구하면 다음과 같다. $A \triangle B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $A \square B = \{-1, 0, 1\}$
 그러므로 $(A \triangle B) - (A \square B) = \{-2, 2\}$
 $\therefore n((A \triangle B) - (A \square B)) = 2$

4. 다음은 두 학생 갑과 을 사이의 집합에 관한 논쟁 중에서 그 일부를 적은 것이다.

갑 : 우리가 생각할 수 있는 집합들 전체의 집합을 S 라 하자. 그러면 S 는 S 자신을 원소로 갖는다.(㉠) 그렇지?
 을 : 그건 말도 안돼. 그런 게 어디 있냐?
 갑 : 좋아. 그러면 자기 자신을 원소로 갖지 않는 집합들 전체의 집합(㉡)은 어떠냐?

위의 논쟁에서 밑줄 친 부분 (㉠), (㉡)에 대한 수학적 표현으로 적절한 것은? [배점 4, 중중]

- ① $S \in S, \{A \mid A \notin A, A \text{는 집합}\}$
 ② $S \in S, \{A \mid A \not\subset A, A \text{는 집합}\}$
 ③ $S \in S, \{A \mid A \in A, A \text{는 집합}\}$
 ④ $S \subset S, \{A \mid A \notin A, A \text{는 집합}\}$
 ⑤ $S \subset S, \{A \mid A \subset A, A \text{는 집합}\}$

해설

(㉠) S 는 S 자신을 원소로 갖는다 $\rightarrow S \in S$
 (㉡) 자기 자신을 원소로 갖지 않는 집합들 전체의 집합 $\rightarrow \{A | A \notin A, A \text{ 는 집합}\}$
 [참고] 러셀의 패러독스를 표현한 내용이다. 러셀은 이것을 ‘이발사의 예화’를 통해 설명했다.

5. 집합 $P = \{x | -1 < x < 1, x \in A\}$ 에 대하여 다음 중 참인 것은? [배점 4, 중중]

- ① A 가 실수의 집합이면 P 는 유한집합이다.
 ② A 가 유리수의 집합이면 P 는 유한집합이다.
 ③ A 가 자연수의 집합이면 P 는 공집합이다.
 ④ A 가 정수의 집합이면 P 는 무한집합이다.
 ⑤ A 가 실수의 집합이면 집합 P 의 원소 중에는 가장 큰 것과 가장 작은 것이 있다.

해설

① x 가 실수이면 $-1 < x < 1$ 인 x 는 무수히 많다. 따라서 P 는 무한집합이다.
 ② x 가 유리수이면 $-1 < x < 1$ 인 x 는 무수히 많다. 따라서 P 는 무한집합이다.
 ③ x 가 자연수이면 $-1 < x < 1$ 인 x 는 없다. 따라서 P 는 공집합이다.
 ④ x 가 정수이면 $-1 < x < 1$ 인 x 는 0뿐이다. 따라서 $P = \{0\}$ 이므로 유한집합이다.
 ⑤ x 가 실수이고 양쪽에 등호가 없으므로 최대인 x 와 최소인 x 는 존재하지 않는다.

6. 두 집합 $A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | 3 < x < 7\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X 를 $X = \{x | p \leq x \leq q\}$ 라 할 때, q 의 최솟값과 최댓값을 차례대로 쓰면? [배점 5, 중상]

- ① 1, 3 ② 1, 5 ③ 1, 7
 ④ 3, 5 ⑤ 3, 7

해설

조건에서 $X \subset A$, $(A - B) \subset X$ 즉, $\{x | 1 \leq x \leq 3\} \subset X \subset \{x | 1 \leq x \leq 5\}$
 $X = \{x | p \leq x \leq q\}$ 에서 $p = 1, 3 \leq q \leq 5$

7. 집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? (단, U 는 전체집합이고, A^c 는 A 의 여집합이다.) [배점 5, 중상]

- ① $A \subset B$ 이면 $B^c \subset A^c$ 이다.
 ② $A = B^c$ 이면 $A \cup B = U$ 이다.
 ③ $A \cap B = \emptyset$ 이고 $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ 이면 $A \cup B = U$ 이다.
 ④ $A \subset B, A \subset C$ 이면 $A \subset (B \cup C)$ 이다.
 ⑤ $A \cap B^c = \emptyset$ 이면 $A^c \cup B = U$ 이다.

해설

- ① $A \subset B$ 이므로 $B^c \subset A^c$
 ② $A = B^c$ 이므로 $A \cup B = B^c \cup B = U$
 ③ 예를 들어 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ 일 때, $A \cap B = \emptyset$ 이지만 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \neq U$ 이므로 옳지 않다.
 ④ $A \subset B$, $A \subset C$ 이므로 $A \subset (B \cap C) \subset (B \cup C) \therefore A \subset (B \cup C)$
 ⑤ $A \cap B^c = \emptyset$ 에서 $(A \cap B^c)^c = \emptyset^c \therefore A^c \cup B = U$

8. $P(A) = \{x | x \subset A\}$ 라고 정의할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? [배점 5, 중상]

- ① $P(A) \supset A$ ② $P(A) \supset \{A\}$
 ③ $P(A) \supset \emptyset$ ④ $P(A) \ni \{A\}$
 ⑤ $P(A) \ni \emptyset$

해설

$A = \{a, b\}$ 일 때, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
 $\rightarrow P(A) \ni A$,
 $\therefore P(A) \supset \{A\}$
 $\rightarrow P(A) \supset \emptyset$ (공집합은 모든 집합의 부분집합)
 $\rightarrow P(A) \ni \emptyset$ ($\emptyset$ 이 원소이므로)

9. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중에서 3 또는 7을 원소로 갖는 집합의 개수는? [배점 5, 중상]

- ① 16 개 ② 18 개 ③ 20 개
 ④ 22 개 ⑤ 24 개

▶ 답 :

▶ 정답 : 5 개

해설

원소 개수가 n 개인 집합의 부분집합 개수 $= 2^n$
 ① 집합 A 의 부분집합 개수: $2^5 = 32$
 ② 3, 7을 모두 원소로 갖지 않는 집합의 개수: $2^3 = 8$
 ③ 3 또는 7을 원소로 갖는 집합의 개수: $2^5 - 2^3 = 24$

10. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \subset B$ 를 만족하는 두 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는?

[배점 5, 상하]

- ① 50 ② 55 ③ 60 ④ 65 ⑤ 70

해설

원소의 개수가 n 개인 집합의 부분집합 개수는 2^n 이다.

i) $n(A) = 1$ $A \subset B$ 이므로 $n(B) = 3$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$2^3 \times 4 = 32$ ($\because n(A) = 1$ 의 경우는 4가지이다)

ii) $n(A) = 2$ $n(B) = 2$ 의 부분집합의 개수 $2^2 \times 6 = 24$ ($\because n(A) = 2$ 의 경우는 6가지이다)

iii) $n(A) = 3$ $n(B) = 1$ 의 부분집합의 개수 $2^1 \times 4 = 8$ ($\because n(A) = 3$ 의 경우는 4가지이다)

iv) $n(A) = 4$ $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 1가지가 존재한다.
 $\therefore 32 + 24 + 8 + 1 = 65$

11. 전체집합 $U = \{x | 0 < x < 7\}$ 이라 할 때, 자연수 n 에 대하여 집합 $A_n = \left\{x \in U \mid |x - \langle x \rangle| = \frac{1}{n}\right\}$ 라고 정의한다. 이때 집합 A_3 의 모든 원소의 개수를 구하면? (단, $\langle x \rangle$: x 를 소수 첫째자리에서 반올림한 정수) [배점 5, 상하]

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$$|x - \langle x \rangle| = \frac{1}{n}, x = \langle x \rangle \pm \frac{1}{n}$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } A_3 \text{ 은 } A_3 = \left\{0 + \frac{1}{3}, 1 \pm \frac{1}{3}, 2 \pm \frac{1}{3}, \dots, 6 \pm \frac{1}{3}, 7 - \frac{1}{3}\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \dots, \frac{17}{3}, \frac{19}{3}, \frac{20}{3}\right\}$$

$$\therefore n(A_3) = 14$$

12. 어떤 심리학자가 사람의 상태를 A, B, C, D, E의 다섯 가지 유형으로 분류하고 다음과 같은 가설을 세웠다.

(i) A형인 사람은 B형이 아니다.

(ii) C형이 아닌 사람은 B형이 아니다.

(iii) C형인 사람은 D형이 아니다.

(iv) E형인 사람은 B형이다.

이 가설에 의하여 성립하지 않는 것을 보기에서 모두 고르면?

㉠ A형인 사람은 E형이 아니다.

㉡ E형인 사람은 C형이 아니다.

㉢ E형이면서도 D형인 사람이 있다.

[배점 5, 상하]

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

조건 A, B, C, D, E 가 각각 상태가 A, B, C, D, E인 사람을 나타낼 때, 가설 (i), (ii), (iii), (iv)를 명제로 표현하면

$A \Rightarrow \sim B, \sim C \Rightarrow \sim B, C \Rightarrow \sim D, E \Rightarrow B$ 이고, 대우를 각각 구해 보면 (i)의 대우: B형이면 A형이 아니다.

즉, $B \Rightarrow \sim A$

(ii)의 대우: B형이면 C형이다.

즉, $B \Rightarrow C$

(iii)의 대우: D형이면 C형이 아니다.

즉, $D \Rightarrow \sim C$

(iv)의 대우: B형이 아니면 E형이 아니다.

즉, $\sim B \Rightarrow \sim E$

$E \Rightarrow B$ 이고 $B \Rightarrow \sim A$ 이므로 $E \Rightarrow \sim A$,

즉 $A \Rightarrow \sim E$

$\sim C \Rightarrow \sim B$ 이고 $\sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로

$\sim C \Rightarrow \sim E$,

즉 $E \Rightarrow C$

$D \Rightarrow \sim C, \sim C \Rightarrow \sim B, \sim B \Rightarrow \sim E$

이므로 $D \Rightarrow \sim E$

따라서 보기 중에서 옳지 않은 것은 ㉔, ㉕이다.

해설

㉑, ㉒, ㉓, ㉔, ㉕이 필요충분조건이다.

㉑: $xy + 1 > x + y > 2 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1, y > 1$ 또는 $x < 1, y < 1$

그런데 $x + y > 2$ 이므로 $x > 1, y > 1 \therefore p \Rightarrow q$ 이고 역도 성립한다.

㉕ $(A \cup B) - (A \cap B) = B \Leftrightarrow A = \phi$

14. 집합 $S = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}\right\}$ 의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{31}$ 이라 하자. 각 집합 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{31}$ 에서 최소인 원소를 각각 뽑아 이들을 모두 더한 값을 구하면 $\frac{p}{q}$ (p, q 는 서로소)이다. 이 때, $p-q$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▶ 정답: 130

13. 다음 보기 중 두 조건 p, q 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것의 개수는?

㉑ $p: xy + 1 > x + y > 2 \quad q: x > 1, y > 1$

㉒ $p: x^2 > y^2 \quad q: |x| > |y|$

㉓ $p: |x| + |y| = 0 \quad q: x^2 + y^2 = 0$

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

㉔ $p: (A \cup B) \cap (B - A)^C = A \cup B, q: B \subset A$

㉕ $p: (A \cup B) - (A \cap B) = B, q: A - B = \phi$

㉖ $p: (A \cup B) - (A \cap B) = B, q: A^C = U$

[배점 5, 상하]

해설

㉠ $\frac{1}{3^4}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^4}$ 을 포함하는 S 의 부분집합의 수와 같다.

$\therefore 2^4$ 개

㉡ $\frac{1}{3^3}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^3}$

을 포함하고 $\frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.

$\therefore 2^3$ 개

㉢ $\frac{1}{3^2}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^2}$

을 포함하고 $\frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.

$\therefore 2^2$ 개

㉣ $\frac{1}{3}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3}$ 은

포함하고 $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.

$\therefore 2$ 개

㉤ 1이 가장 작은 원소가 되는 경우는 1가지이다.

그러므로 구하는 값은 $\frac{1}{3^4} \times 2^4 + \frac{1}{3^3} \times 2^3 + \frac{1}{3^2} \times$

$$2^2 + \frac{1}{3} \times 2 + 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + 1$$

$$= \frac{16 + 24 + 36 + 54 + 81}{81} = \frac{211}{81}$$

$\therefore p = 211, q = 81$ 이므로 $p - q = 130$

해설

① 충분조건

② 필요조건

③ 필요조건

⑤ 아무 조건 아님

15. x, y 가 실수일 때, 다음 중 조건 p 가 조건 q 의 필요충분 조건인 것은? [배점 6, 상중]

① $p: x + y \geq 4, q: x \geq 2$ 또는 $y \geq 2$

② $p: x + y$ 는 유리수, $q: x, y$ 는 모두 유리수

③ $p: xy > x + y > 4, q: x > 2$ 이고 $y > 2$

④ $p: xy + 1 > x + y > 2, q: x > 1$ 이고 $y > 1$

⑤ $p: |x| > |y|, q: x > y$