단원 종합 평가

1. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 4, 7\}$ 에 대하여, $A - B^c$의 모든 원소의 총합은? [배점 2, 하중]

① 3　② 8　③ 12　④ 15　⑤ 20

해설

$A - B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B$, $A \cap B = \{1,\ 7\}$ $\therefore$ $1 + 7 = 8$

2. 다음 명제 중에서 그 부정이 참인 것을 모두 고르면? [배점 2, 하중]

① $2 < \sqrt{6} \leq 3$

② 2는 소수가 아니다.

③ $2 > 3$ 또는 $3 \leq 5$

④ $2 \leq \sqrt{3} < 3$

⑤ 24는 4와 6의 공배수이다.

해설

거짓인 명제의 부정은 참이므로 거짓인 명제를 찾으면 된다. ①, ③, ⑤는 참인 명제이고, 2는 소수이고 $\sqrt{3} = 1.7\cdots$ 이므로 ②, ④는 거짓인 명제이다.

3. 명제 'p 이면 q 가 아니다' 의 역인 명제의 대우를 구하면? [배점 2, 하중]

① q 가 아니면 p 이다.

② q 이면 p 가 아니다.

③ p 가 아니면 q 이다.

④ p 가 아니면 q 이다.

⑤ q 이면 p 이다.

해설

$p \to \sim q \Rightarrow \sim q \to p \Rightarrow \sim p \to q \Rightarrow$ p가 아니면 q이다.

4. 50명의 수험생 중 문제 a의 정답자는 36명, 문제 b의 정답자는 29명, 문제 a , b를 모두 정확히 푼 수험생은 21명이다. 이 때 문제 a, b를 모두 틀린 수험생의 수를 구하면 ? [배점 3, 하상]

① 2 명　② 4 명　③ 6 명

④ 8 명　⑤ 12 명

해설

문제 a의 정답자를 A, 문제 b의 정답자를 B라고 할 때 $n(A) = 36$, $n(B) = 29$, $n(A \cap B) = 21$, $n(U) = 50$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 44$

$\therefore n(A^c \cap B^c) = n(U) - n(A \cup B) = 50 - 44 = 6$

5. 다음 설명 중 옳지 않은 것은? [배점 3, 하상]

① $\{x|x$는 1보다 작은 자연수$\}$ 는 공집합이다.

② 두 자리의 자연수의 집합은 유한집합이다.

③ 집합 $A = \{\varnothing\}$ 이면 $n(A) = 1$이다.

④ 집합 $B = \{\varnothing\}$ 이면 B 는 공집합이다.

⑤ 어떤 조건이 주어졌을 때, 그 조건을 만족하는 원소가 하나도 없는 집합이 공집합이다.

해설

1보다 작은 자연수는 없으므로 공집합이고, 두 자리의 자연수의 집합은 10부터 99까지이므로 유한집합이다. 또, 집합 $A = \{\varnothing\}$ 이면 $\varnothing$ 라는 원소가 1개 있는 것이므로$n(A) = 1$ 이고, 공집합은 원소가 하나도 없는 집합이다. 그런데, 집합 $B = \{\phi\}$ 이면 ϕ이라는 원소가 1개 있는 집합이다.

6. 통일고등학교에서 50명 학생을 대상으로 수학, 영어에 대한 흥미도를 조사한 결과를 수학을 좋아하는 학생은 32명, 영어를 좋아하는 학생은 27명이었고 수학과 영어를 모두 좋아하는 학생은 13명이었다. 그렇다면 수학과 영어를 모두 싫어하는 학생은 몇 명인지 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4 명

해설

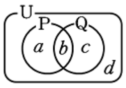
수학 : A , 영어 : B , 전체 : U

$n(A) = 32, n(B) = 27, n(A \cap B) = 13$

$n(A \cup B) = 32 + 27 - 13 = 46$

$\therefore\ n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 50 - 46 = 4$

$\therefore$ 4명

7. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계가 다음과 같을 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보여주는 원소는 무엇인가? 

[배점 3, 하상]

① a　　② b　　③ c

④ d　　⑤ a 와 c

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이되려면 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여$P \subset Q$ 가 성립해야 한다.$P \subset Q\ \leftrightarrow\ x \in P$ 이면 $x \in Q$
P 의 원소 a 에 대하여 $a \in P$ 이나 $a \notin Q$ 이므로$p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

8. 다음 두 조건을 만족하는 집합 A를 구하면?

㉠ $A \cap \{b, c, d, e\} = \{b, e\}$
㉡ $A \cup \{b, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$

[배점 3, 중하]

① $\{a, b\}$ ② $\{a, e\}$ ③ $\{a, b, e\}$
④ $\{a, b, d\}$ ⑤ $\{a, b, d, e\}$

해설

조건㉠로부터 집합 A는 c, d를 제외한 b, e를 원소로 갖고 조건㉡로부터 집합 A는 a를 원소로 갖는다.
$\therefore A = \{a, b, e\}$

9. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$일 때, $X \subset A$, $A - X = \{1, 3, 4, 5\}$를 만족하는 집합 X의 부분집합의 개수는 몇 개인가? [배점 3, 중하]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$X = \{2\}$이므로 X의 부분집합의 개수는 2 개

10. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수 <u>없는</u> 것은? (단, U$\neq \varnothing$) [배점 3, 중하]

① $A \cup B = B$ ② $A \cap B = A$
③ $(A \cap B)^c = B^c$ ④ $B^c \subset A^c$
⑤ $A - B = \varnothing$

해설

$A \subset B$ 이면
① $A \cup B = B$
② $A \cap B = A$
③ $(A \cap B)^c = A^c (\neq B^c)$
④ $B^c \subset A^c$
⑤ $A - B = \varnothing$

11. $x \geq a$가 $x^2 - 4 < 0$의 필요조건이 되게 하는 a 의 최댓값을 구하시오. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 - 4 < 0$ 에서 $-2 < x < 2$ 이므로 $x \geq a$가 $-2 < x < 2$의 필요조건이 되기 위해서는 $a \leq -2$ 이어야 한다. 따라서, a 의 최댓값은 -2이다.

12. $a, b, c \in R$ 일 때, 조건 $a = b = c$ 의 부정을 바르게 말한 것은? [배점 3, 중하]

① a, b, c 는 모두 다르다.

② a, b, c 는 모두 다르지 않다.

③ a, b, c 중에는 같은 수가 있다.

④ a, b, c 중에는 0이 아닌 수가 있다.

⑤ a, b, c 중에는 다른 두 수가 있다.

해설

①:$a = b = c \Rightarrow a = b$ 이고, $b = c$ 이고, $c = a$ 이다.
부정 : $a \neq b$또는$b \neq c$또는$c \neq a \Rightarrow a, b, c$ 중에는 다른 두 수가 있다

13. 세 조건 $p,\ q,\ r$ 에 대하여 r 이 $\sim q$ 이기 위한 충분조건, q 가 p 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 반드시 참 이라고 할 수 없는 것은? [배점 3, 중하]

① $p \rightarrow q$ ② $r \rightarrow \sim q$

③ $p \rightarrow \sim r$ ④ $q \rightarrow \sim r$

⑤ $\sim p \rightarrow r$

해설

$r \rightarrow \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow \sim r(T) \cdots$ ㉠$p \rightarrow q(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T) \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서$r \rightarrow \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow r \rightarrow \sim p(T)$
$\Rightarrow p \rightarrow \sim r(T)$

14. 자연수 N 의 배수의 집합을 A_N 이라 할 때, $(A_4 \cap A_6) \supset A_a$ 을 만족하는 a 의 최솟값을 m , $(A_4 \cup A_6) \subset A_b$ 을 만족하는 b 의 최댓값을 M 이라 할 때, $M - m$ 의 값은? [배점 4, 중중]

① -10 ② 28 ③ 14 ④ 10 ⑤ -14

해설

$(A_4 \cap A_6) \supset A_a \rightarrow m = 12(\because\ 4, 6$ 의 $L.C.M)$
$(A_4 \cup A_6) \subset A_b \rightarrow M = 2\ (\because\ 4, 6$ 의 $G.C.D)$
$\therefore\ M - m = -10$

15. 자연수 전체의 집합 N의 부분집합으로서 k 의 배수들의 집합을 A_k 라 하자. 이때, $A_4 \cap A_6 = A_a$ 를 만족시키는 a 의 값과 $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$ 를 만족시키는k 의 최댓값 b 의 합은? [배점 4, 중중]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

해설

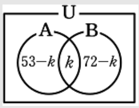
$A_4 \cap A_6 = A_a$ 이면 $A_a \subset A_4, A_a \subset A_6$ 이므로 a 는 4와 6의 최소공배수이다.
$\therefore\ a = 12$ $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$ 에서 $A_8 \subset A_k$이고$A_{12} \subset A_k$ 이므로 k 는 8과 12의 공약수이다따라서 k 의 최댓값 b 는 8과 12의 최대공약수이므로 $\therefore\ b = 4$
따라서 $a + b = 16$

16. 100명의 학생 중 음악을 좋아하는 사람은 53명, 스포츠를 좋아하는 사람은 72명이다. 음악과 스포츠 양쪽을 좋아하는 사람수를 k 라 할 때, k 가 취할 수 있는 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설



음악을 좋아하는 사람의 집합을 A, 스포츠를 좋아하는 사람의 집합을 B라 하면 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=53+72-k\le 100$

$\therefore 25\le k$

한편 $(A\cap B)\subset A$, $k=n(A\cap B)\le n(A)=53$

$\therefore k\le 53$

$\therefore 25\le k\le 53$

$M-m=28$

17. 두 조건 $p: |x-k|\le 1$, $q: -7\le x\le 3$에서 명제 $p\to q$가 참일 때, k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면? [배점 4, 중중]

① -12 ② -4 ③ 8

④ 4 ⑤ 12

해설

$P\subset Q$

$p: |x-k|\le 1 \to k-1\le x\le k+1$

$-7\le k-1 \to -6\le k$ $k+1\le 3\to k\le 2$

$\therefore\ -6\le k\le 2$ $(-6)+2=-4$

18. 집합 $A=\{1,3,5,7,9\}$의 부분집합 중에서 3 또는 7을 원소로 갖는 집합의 개수는? [배점 5, 중상]

① 16 개 ② 18 개 ③ 20 개

④ 22 개 ⑤ 24 개

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

원소 개수가 n개인 집합의 부분집합 개수$=2^n$

㉠ 집합 A 의 부분집합 개수 : $2^5=32$

㉡ 3, 7을 모두 원소로 갖지 않는 집합의 개수 : $2^3=8$

㉢ 3 또는 7을 원소로 갖는 집합의 개수 : $2^5-2^3=24$

19. 조건 p, q, r 을 만족시키는 집합을 각각 P, Q, R 라고 할 때, $P=\{x|-1\le x\le 1,\ x\ge 5\}$, $Q=\{x|x\ge a\}$, $R=\{x|x\ge b\}$ 이다. 이 때, 조건 q 는 p 이기 위한 필요조건이고, 조건 r 은 p 이기위한 충분조건이면 a 의 최댓값과 b 의 최솟값은? [배점 5, 중상]

① a 의 최댓값 1 , b 의 최솟값 -1

② a 의 최댓값 -1 , b 의 최솟값 1

③ a 의 최댓값 5 , b 의 최솟값 -1

④ a 의 최댓값 -1 , b 의 최솟값 5

⑤ a 의 최댓값 5, b 의 최솟값 -5

해설

$p \rightarrow q$, 즉 $P \subset Q$ 이면

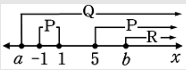
q 는 p 이기 위한 필요조건,

$r \rightarrow p$, 즉 $R \subset P$ 이면

r 은 p 이기 위한 충분조건이므로

$P \subset Q,\ R \subset P$가 되는 $a,\ b$를 정할 수 있다.

문제의 조건을 만족시키도록 집합 $P,\ Q,\ R$ 를 수직선 위에 나타내면



따라서, $a \leq -1,\ b \geq 5$

$\therefore$ a 의 최댓값 -1 , b 의 최솟값 5

20. 두 조건 $p_n, q_n(n=1,\ 2)$에 대하여 $P_n = \{x | x$는 p_n을 만족한다.$\}$, $Q_n = \{x | x$는 q_n을 만족한다.$\}$ 이고, p_1 은 p_2이기 위한 필요조건, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 5, 중상]

① $P_1 \cap P_2 = P_2$

② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$

③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1$

④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_2$

⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1$

해설

p_1 은 P_2이기 위한 필요조건이므로 $P_1 \supset P_2$, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건이므로 $P_1 \supset Q_1,\ P_2 \supset Q_2$

① $P_1 \cap P_2 = P_2$

② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$

③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1 \cup P_2 = P_1$

④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_1 \cap P_2 = P_2$

⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1 \cup Q_2 \neq Q_1$ 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.