

단원 종합 평가

1. 50명의 수험생 중 문제 a 의 정답지는 36명, 문제 b 의 정답지는 29명, 문제 a, b 를 모두 정확히 푼 수험생은 21명이다. 이 때 문제 a, b 를 모두 틀린 수험생의 수를 구하면 ? [배점 3, 하상]

- ① 2명 ② 4명 ③ 6명
④ 8명 ⑤ 12명

해설

문제 a 의 정답자를 A , 문제 b 의 정답자를 B 라고 할 때 $n(A) = 36$, $n(B) = 29$, $n(A \cap B) = 21$, $n(U) = 50$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 44$
 $\therefore n(A^c \cap B^c) = n(U) - n(A \cup B) = 50 - 44 = 6$

2. 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 중 a, c 를 반드시 포함하고, e 를 포함하지 않는 것의 개수를 구하시오. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 4

해설

이것은 집합 $\{b, d\}$ 의 부분집합 $\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}$ 에 원소 a, c 를 포함시킨 $\{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}$ 이므로, 구하는 부분집합의 개수는 4개다.
 $2^5 - 2 - 1 = 2^2 = 4$

3. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

[배점 3, 하상]

- ① 자연수 n 에 대하여, n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.
② 자연수 n, m 에 대하여 $n^2 + m^2$ 이 홀수이면, nm 은 짝수이다.
③ 자연수 n 에 대하여, n^2 이 3의 배수이면, n 은 3의 배수이다.
④ a, b 가 실수일 때, $a + b\sqrt{2} = 0$ 이면, $a = 0$ 이다.
⑤ 두 실수 a, b 에 대하여, $a + b > 2$ 이면, $a > 1$ 또는 $b > 1$

해설

- ①, ③ : n^2 이 p 의 배수이면, n 은 p 의 배수이다. (참)
② : 대우는 ' nm 은 홀수이면 $n^2 + m^2$ 이 짝수이다' nm 은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 $n^2 + m^2$ 은 짝수이다. $\therefore$ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a = 2\sqrt{2}, b = -1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 a, b 가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a \leq 1$ 그리고 $b \leq 1$ 이면 $a + b \leq 2$ (참)

4. 아래 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 바르게 나타낸 것은?

[배점 3, 중하]



- ① $(B - C) \cup A^c$ ② $A \cap (B \cap C^c)$
③ $A - (B \cup C)$ ④ $(A \cup B) - C$
⑤ $(B - C) - A$

해설

직관적으로 보면 빗금친 부분은 $(A \cap B) - C$
 $(A \cap B) - C = (A \cap B) \cap C^c$
 $= A \cap (B \cap C^c)$

5. 자연수 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할 때,
 $(A_{24} \cup A_{18}) \subset A_k$ 를 만족하는 k 의 최댓값은?
 [배점 3, 중하]

- ① 2 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 18

해설

$A_{18} \subset A_k$ 이고 $A_{24} \subset A_k$ 이므로 k 는 18, 24의
 공약수이고, 이 중에서 최대인 것은 6이다.

6. 다음 중 거짓인 명제는? [배점 3, 중하]

- ① 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.
 ② 자연수 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.
 ③ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.
 ④ 자연수에 대하여 두 수가 모두 짝수이면 두 수의 합도 짝수이다.
 ⑤ 자연수에 대하여 두 수의 합이 짝수이면 두 수는 모두 짝수이다.

해설

주어진 명제의 참, 거짓에 대한 직접적인 판단이 어려울 때는 그 명제의 대우가 참인지 확인한다
 ①, ② 생략
 ③ $n = 3k + 1$ $n^2 = (3n + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \neq 3m$ (참) (대우가 참 $\rightarrow$ 참인 명제)
 ④ 두 수의 합이 홀수이면 두 수 중 적어도 하나는 홀수이다. (참)
 ⑤ 반례 : 두 수 모두 홀수인 경우(거짓)

7. 다음 중 명제 「 $x + y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.」가 거짓임을 보이는 반례는?
 [배점 3, 중하]

- ① $x = 1, y = \frac{1}{2}$ ② $x = 100, y = \frac{1}{2}$
 ③ $x = 1, y = 1$ ④ $x = 2, y = 4$
 ⑤ $x = -1, y = -5$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것을 고르면 된다.
 따라서 ②가 올바른 반례이다

8. 다음은 등식 $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$ 가 성립함을 집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 설명한 것이다. 증명과정에서 쓰인 성질을 아래의 <보기>에서 골라 그 번호를 사용된 순서대로 모두 쓰시오.(답안 입력예: 3, 2, 1, 4)

$$\begin{aligned}(A - B) \cap (A - C) &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) \\ &= A \cap (B^c \cap C^c) \\ &= A \cap (B \cup C)^c \\ &= A - (B \cup C)\end{aligned}$$

보기

- ㉠ $A \cap B = B \cap A$ (교환법칙)
- ㉡ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (결합법칙)
- ㉢ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(분배법칙)
- ㉣ $A - B = A \cap B^c$ (차집합의 성질)
- ㉤ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (드모르간의 법칙)

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 4

▷ 정답: 3

▷ 정답: 5

▷ 정답: 4

해설

생략

9. 자연수 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할 때, $(A_4 \cap A_6) \supset A_k$ 인 k 의 최솟값을 a 라 하고 $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$ 인 k 의 최댓값을 b 라 할 때 $a+b$ 의 값은?
[배점 4, 중중]

- ① 16 ② 20 ③ 10 ④ 15 ⑤ 27

해설

$(A_4 \cap A_6) \supset A_k$ 인 k 는 4와 6의 공배수이므로 k 의 최솟값은 4와 6의 최소공배수 12이다.
 $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$ 인 k 는 8과 12의 공약수이므로 k 의 최댓값은 8과 12의 최대공약수 4이다.
 $\therefore$ 최솟값 a 는 12이고 최댓값 b 는 4이므로 $a+b = 12+4 = 16$

10. 두 집합 A, B 에 대하여 연산 $\triangle, \square$ 을 $A \triangle B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$, $A \square B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ 로 정의한다. $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 1\}$ 일 때, $n((A \triangle B) - (A \square B))$ 는?
[배점 4, 중중]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

연산 $\triangle, \square$ 에 대하여 원소를 각각 구하면 다음과 같다. $A \triangle B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $A \square B = \{-1, 0, 1\}$
그러므로 $(A \triangle B) - (A \square B) = \{-2, 2\}$
 $\therefore n((A \triangle B) - (A \square B)) = 2$

11. $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $P = \{p | p = a + b, a \in A, b \in B\}$, $Q = \{q | q = ab, a \in A, b \in B\}$ 일 때, 집합 $P \cap Q$ 의 원소의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4개

해설

집합 P 는 집합 A 의 원소와 집합 B 의 원소끼리 더한 것을 원소로 하고, 집합 Q 는 집합 A 의 원소와 집합 B 의 원소끼리 곱한 것을 원소로 한다. 두 집합의 원소를 구하면 $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Q = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 이므로 $P \cap Q = \{0, 1, 2, 3\}$ 따라서 집합 $P \cap Q$ 의 원소의 개수는 4개이다.

12. 두 조건 p, q 를 각각 만족하는 집합 P, Q 에 대하여

$$\textcircled{1} (P \cap Q) \cup (P - Q) \cap Q = P$$

$$\textcircled{2} (P \cup Q) - Q = \phi$$

가 성립할 때, 다음 중 참인 것은? [배점 4, 중중]

- ① $q \rightarrow p$ ② $p \rightarrow \sim q$
 ③ $q \rightarrow \sim p$ ④ $\sim p \rightarrow q$
 ⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

① $P \cap Q = P \therefore P \subset Q$
 ② $(P \cup Q) - Q = \emptyset \therefore P \subset Q \therefore p \rightarrow q(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T)$

13. 세 조건 p, q, r 에 대하여 q 는 p 의 필요조건, q 는 r 의 충분조건이고 r 는 p 의 충분조건이다. 이 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 필요충분

해설

q 는 p 의 필요조건이므로 $p \Rightarrow q \dots\dots \textcircled{1}$
 q 는 r 의 충분조건이므로 $q \Rightarrow r \dots\dots \textcircled{2}$
 r 는 p 의 충분조건이므로 $r \Rightarrow p \dots\dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r \dots\dots \textcircled{4}$
 $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 에서 $r \Rightarrow p, p \Rightarrow r$ 이므로 $r \Leftrightarrow p$ 이다.

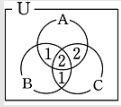
14. 세 권의 책 A, B, C가 있다. A를 읽은 학생은 5명, B를 읽은 학생은 4명, C를 읽은 학생은 7명, A와 B를 모두 읽은 학생은 3명, 세 권을 모두 읽은 학생은 2명일 때, C만 읽은 학생의 수가 가장 적을 경우는 몇 명인가? [배점 5, 중상]

- ① 1명 ② 2명 ③ 3명
 ④ 4명 ⑤ 5명

해설

집합 A, B, C 를 각각 책 A, B, C 를 읽은 학생들의 집합이라 하면 $n(A) = 5, n(B) = 4, n(C) = 7, n(A \cap B) = 3, n(A \cap B \cap C) = 2$

C 만 읽는 학생수가 가장 적을 때는 A 와 C, B 와 C 를 읽은 학생수가 가장 많은 경우로 벤다이어그램에서



$$7 - (2 + 2 + 1) = 2(\text{명})$$

15. 조건 p, q, r 을 만족시키는 집합을 각각 P, Q, R 라고 할 때, $P = \{x | -1 \leq x \leq 1, x \geq 5\}$, $Q = \{x | x \geq a\}$, $R = \{x | x \geq b\}$ 이다. 이 때, 조건 q 는 p 이기 위한 필요조건이고, 조건 r 은 p 이기위한 충분조건이면 a 의 최댓값과 b 의 최솟값은? [배점 5, 중상]

- ① a 의 최댓값 1, b 의 최솟값 -1
- ② a 의 최댓값 -1, b 의 최솟값 1
- ③ a 의 최댓값 5, b 의 최솟값 -1
- ④ a 의 최댓값 -1, b 의 최솟값 5
- ⑤ a 의 최댓값 5, b 의 최솟값 -5

해설

$p \rightarrow q$, 즉 $P \subset Q$ 이면

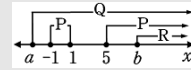
q 는 p 이기 위한 필요조건,

$r \rightarrow p$, 즉 $R \subset P$ 이면

r 은 p 이기 위한 충분조건이므로

$P \subset Q, R \subset P$ 가 되는 a, b 를 정할 수 있다.

문제의 조건을 만족시키도록 집합 P, Q, R 를 수직선 위에 나타내면



따라서, $a \leq -1, b \geq 5$

$\therefore a$ 의 최댓값 -1, b 의 최솟값 5

16. 네 개의 조건 p, q, r, s 에 대하여 $q \Rightarrow \sim s, \sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$ 라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은? [배점 5, 중상]

- ① $p \Rightarrow q$ ② $p \Rightarrow \sim r$ ③ $r \Rightarrow q$
- ④ $r \Rightarrow s$ ⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$q \rightarrow \sim s, \sim r \rightarrow p$

$s \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow r$

$\therefore \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow p \rightarrow q$

17. 전체집합 U 의 임의의 부분집합을 A 라 하고 조건 p, q 를 만족시키는 집합을 P, Q 라 하자. $(A \cap P) \cup (A^c \cap Q) = (A \cap P) \cup Q$ 가 성립할 때 다음 중 참인 명제는?
[배점 5, 중상]

- ① $q \rightarrow p$ ② $p \rightarrow q$ ③ $p \leftrightarrow q$
④ $q \rightarrow p$ ⑤ $q \rightarrow p$

해설

집합 A 가 전체집합 U 의 임의의 부분집합이므로 $A = U$ 라 놓으면, 좌변 : $(U \cap P) \cup (U^c \cap Q) = P \cup \emptyset = P$
우변 : $(U \cap P) \cup Q = P \cup Q \therefore P = P \cup Q$ 이므로 $Q \subset P \therefore q \rightarrow p$ 는 참이다.

18. 집합 A, B 는 연속된 자연수 6개를 원소로 갖는 집합이다. A, B 의 원소의 총합을 $f(A), f(B)$ 라 할때, $|f(A) - f(B)|$ 를 구하면? (단, $n(A \cap B) = 3$)
[배점 5, 상하]

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$A = \{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5\}$ 라 하면 $n(A \cap B) = 3$ 이므로 $B = \{a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2\}$ 라 할 수 있다.
 $f(A) = 6a + 15$, $f(B) = 6a - 3 \therefore |f(A) - f(B)| = |6a + 15 - 6a + 3| = 18$

19. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, x\}$ 에 대하여 A 의 모든 부분집합 원소들의 총합을 구했더니 1024였다면 x 의 값은?
[배점 5, 상하]

- ① 6 ② 8 ③ 16 ④ 17 ⑤ 24

해설

부분집합에서 각 원소들은 총 2^5 번씩 들어가 있으므로 $2^5 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + x) = 1024 = 2^{10}$
 $x + 15 = 2^5 = 32$
 $\therefore x = 17$

20. 민주, 한결, 은하, 겨레 4명의 학생은 각자가 적당한 시간에 봉사활동에 다녀오기로 하였으나 그 중 한명이 참석하지 못하였다. 그런데 네 명의 학생은 아래와 같이 서로 엇갈린 주장을 하고 있다. 이 진술 중 오직 하나만이 옳은 것일 때, 참석하지 못한 학생과 옳게 진술한 학생은?

민주: 한결이가 빠졌어.
한결: 민주가 한 말은 거짓말이야.
은하: 민주가 빠졌어.
겨레: 나는 안 빠졌어.

[배점 5, 상하]

- ① 겨레, 한결 ② 겨레, 민주
③ 겨레, 은하 ④ 민주, 한결
⑤ 민주, 은하

해설

- ㉠ 민주가 참 : 한결, 겨레가 빠진것이 되어 모순
 - ㉡ 한결이 참 : 겨레가 빠짐
 - ㉢ 은하가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
 - ㉣ 겨레가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
- ∴ 한결의 진술이 참, 겨레가 참석하지 못함.