

단원 종합 평가

1. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것은? [배점 3, 중하]

- ① $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$
 ② $(A - B) \cap (B - A) = \phi$
 ③ $(A - B) \cup (A - B^c) = A$
 ④ $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
 ⑤ $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cap C)$

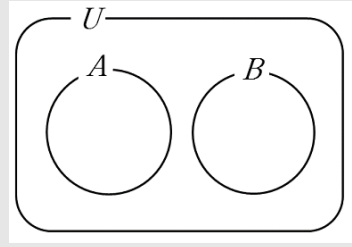
해설

$$(A - B) \cap (A - C) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap (B \cup C)^c = A - (B \cup C)$$

2. 집합에 관한 두 등식이 서로 동치가 아닌 것은? (단, $\emptyset$ 는 공집합, U 는 전체집합) [배점 3, 중하]

- ① $A \cap B = A$ 와 $A \cup B = B$
 ② $A - B = A$ 와 $A \cap B = \emptyset$
 ③ $A - B = \emptyset$ 와 $A \cap B = A$
 ④ $A \cap B = \emptyset$ 와 $A \cup B = U$
 ⑤ $A \cup B = A$ 와 $B - A = \emptyset$

해설



벤다이어그램을 참고하면 $A \cap B = \emptyset$ 이나 $A \cup B \neq U$

3. 다음<보기>의 ()안에 알맞은 것을 차례로 적어서 오.(가) 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \cup C = B \cup C$ 인 것은 $A = B$ 이기 위한 ()조건이다.(나) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ 은 $x = y = 0$ 이기 위한 ()조건이다.

[배점 3, 중하]

- ① 충분, 충분
 ② 필요, 충분
 ③ 필요, 필요
 ④ 필요충분, 필요
 ⑤ 필요충분, 필요충분

해설

(가) $A \cup C = B \cup C$

$\frac{x}{0}$

$A = B$ 반례) $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{1, 2\}$ 인 경우 $\therefore$ 필요조건

(나) $x^2 - 2xy + y^2 = 0, (x - y)^2 = 0$ 이므로 $x = y$ $\frac{x}{0}$ $x = y = 0 \therefore$ 필요조건

4. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 '반드시 참이다'라고 말할 수 없는 명제는?
[배점 3, 중하]

- ① $q \rightarrow r$ ② $p \rightarrow r$
 ③ $\sim p \rightarrow \sim r$ ④ $\sim r \rightarrow \sim p$
 ⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$, $\sim r \rightarrow \sim q \leftrightarrow q \rightarrow r$ 이므로 $p \rightarrow r \leftrightarrow r \rightarrow \sim p$, $q \rightarrow r$ 이므로 $p \rightarrow r \leftrightarrow r \rightarrow \sim p$

5. 두 집합 A, B 에 대하여 연산 $\triangle, \square$ 을 $A \triangle B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, $A \square B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ 로 정의한다. $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 1\}$ 일 때, $n((A \triangle B) - (A \square B))$ 는? [배점 4, 중중]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

연산 $\triangle, \square$ 에 대하여 원소를 각각 구하면 다음과 같다. $A \triangle B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $A \square B = \{-1, 0, 1\}$
 그러므로 $(A \triangle B) - (A \square B) = \{-2, 2\}$
 $\therefore n((A \triangle B) - (A \square B)) = 2$

6. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면 $P \cup Q = P$, $Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 아닌 것은?
[배점 4, 중중]

- ① $q \rightarrow p$ ② $r \rightarrow q$
 ③ $r \rightarrow p$ ④ $\sim q \rightarrow \sim r$
 ⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$P \cup Q = P$ 이므로 $Q \subset P$, $Q \cap R = R$ 이므로 $R \subset Q$ 따라서 $R \subset Q \subset P$
 $\therefore r \rightarrow q \rightarrow p$ 의 대우 $\sim p \rightarrow \sim q \rightarrow \sim r$ 따라서 ⑤는 참인 명제라 할 수 없다.

7. 두 조건 $p: |x-2| \leq h$, $q: |x+1| \leq 7$ 에 대하여 'p이면 q이다.'가 참이 되도록 하는 h 의 최댓값을 구하여라. (단, $h \geq 0$) [배점 4, 중중]

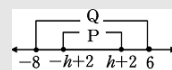
▶ 답:

▶ 정답: 4

해설

$$p: 2-h \leq x \leq 2+h$$

$$q: -8 \leq x \leq 6$$



$$-h+2 \geq -8 \leftrightarrow h \leq 10, h+2 \leq 6 \leftrightarrow h \leq 4$$

$$\therefore h \leq 4$$

8. 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자. $p \rightarrow q$ 가 참일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

[배점 4, 중중]

- ① $P \cap Q = P$ ② $P \cup Q = Q$
 ③ $P - Q = \emptyset$ ④ $P \subset Q$
 ⑤ $Q - P = Q$

해설

$p \rightarrow q$ 가 참이면 $P \subset Q$ 이므로 $P \cap Q = P, P \cup Q = Q, P - Q = \emptyset$ 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

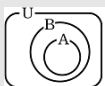
9. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $[(A \cap B) \cup (B - A)] \cap A = A$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

[배점 5, 중상]

- ① $A \cup B = A$ ② $A \cap B = B$
 ③ $A - B = U$ ④ $A^c \cup B = U$
 ⑤ $(A \cap B)^c = B^c$

해설

$(A \cap B) \cup (B - A) = B \therefore$ 준식 : $B \cap A = A$

$\Rightarrow A \subset B$  $\therefore A^c \cup B = U$

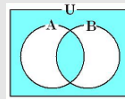
- ① $A \cup B = B$
 ② $A \cap B = A$
 ③ $A - B = \emptyset$
 ⑤ $(A \cap B)^c = A^c$

10. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 등식 $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = U$ 가 성립할 때, 다음 중 A, B 사이의 관계를 가장 바르게 나타낸 것은? [배점 5, 중상]

- ① $A \cup B = U$ ② $A \cap B = B$
 ③ $A - B = \emptyset$ ④ $A = B$
 ⑤ $A \cap B = \emptyset$

해설

$(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c = U$ 이므로 벤다이어그램을 그려보면 하얀 부분, 즉 $(A - B) \cup (B - A) = \emptyset$ 이 됨을 알 수 있다.



따라서 $A - B = \emptyset$ 이고 $B - A = \emptyset$ ($\because P \cup Q = \emptyset$ 이면 $P = \emptyset$ 이고 $Q = \emptyset$)

$A \subset B, B \subset A$ ($\because P - Q = \emptyset$ 이면 $P \subset Q$)
 $\therefore A = B$ ($\because P \subset Q, Q \subset P$ 이면 $P = Q$)

11. 다음은 명제 '세 자연수 a, b, c 에 대하여, $a^2 + b^2 = c^2$ 이면, a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수이다.'의 참, 거짓을 대우를 이용하여 판별하는 과정이다.

주어진 명제의 대우는

'세 자연수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 모두 3의 배수가 아니면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ ' 이므로 $a^2 + b^2 = 3m + [\ominus], c^2 = 3n + [\omin�] \therefore a^2 + b^2 \neq c^2$ (단, m, n 은 음이 아닌 정수) 따라서, 대우가 [$\omin�$] 이므로 주어진 명제도 [$\omin�$] 이다.

위의 과정에서, $\omin�, \omin�, \omin�$ 에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 바르게 나열한 것은? [배점 5, 중상]

- ① 1, 0, 참 ② 1, 2, 거짓 ③ 2, 1, 참
 ④ 2, 0, 참 ⑤ 0, 1, 참

해설

(대우)" a, b, c 모두 3의 배수가 아니라면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ " 이것의 참, 거짓을 증명하는 과정이다. $a = 3p \pm 1, b = 3q \pm 1, c = 3r \pm 1$ 이면 $a^2 = 3(3p^2 \pm 2p) + 1, b^2 = 3(3q^2 \pm 2q) + 1$ 이므로 $a^2 + b^2 = 3m + 2$ (m 은 음이 아닌 정수)의 꼴이다. $\therefore [\text{㉠}] = 2$ 그리고 $c^2 = 3(3r^2 \pm 2r) + 1$ 이므로 $c^2 = 3n + 1$ (n 은 음이 아닌 정수)의 꼴이다. $\therefore [\text{㉡}] = 1$. $a^2 + b^2 \neq c^2$ 따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. $\therefore [\text{㉢}] = \text{참}$

12. 전체집합 U 의 임의의 부분집합을 A 라 하고 조건 p, q 를 만족시키는 집합을 P, Q 라 하자. $(A \cap P) \cup (A^c \cap Q) = (A \cap P) \cup Q$ 가 성립할 때 다음 중 참인 명제는?

[배점 5, 중상]

- ① $q \rightarrow p$ ② $p \rightarrow q$ ③ $p \leftrightarrow q$
 ④ $q \rightarrow p$ ⑤ $q \rightarrow p$

해설

집합 A 가 전체집합 U 의 임의의 부분집합이므로 $A = U$ 라 놓으면, 좌변 : $(U \cap P) \cup (\phi \cap Q) = P \cup \phi = P$
 우변 : $(U \cap P) \cup Q = P \cup Q \therefore P = P \cup Q$ 이므로 $Q \subset P \therefore q \rightarrow p$ 는 참이다.

13. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B)^c = B - A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

[배점 5, 중상]

- ① $A \cap B = \emptyset$ ② $A \cup B = U$
 ③ $A \subset B^c$ ④ $A^c \cup B = U$
 ⑤ $A = B^c$

해설

$(A - B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B, B - A = A^c \cap B$
 $A^c \cup B = A^c \cap B$ 에서 $A^c = B$ 즉, $A = B^c$

14. 세 조건 p, q, r 에 대하여 q 가 p 이기 위한 필요조건이고 q 가 r 이기 위한 충분조건이다. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 전체집합 U 의 세 부분집합 P, Q, R 이라 할 때 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

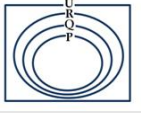
- ㉠ $Q \subset R$ ㉡ $R^c \subset (P \cup Q)$
 ㉢ $(P \cap Q)^c \subset R^c$

[배점 5, 중상]

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
 ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

q 가 p 이기 위한 필요조건이고 q 가 r 이기 위한 충분조건일 때, 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow r$ 이 모두 참이므로 $p \rightarrow q \rightarrow r \therefore p, q, r$ 의 진리집합 P, Q, R 사이의 관계는 $P \subset Q \subset R$ 이 성립한다.



- ㉠ $Q \subset R$ 성립
- ㉡ R^c 과 $P \cup Q$ 는 서로소이므로 성립하지 않는다.
- ㉢ $(P \cap Q) \subset R$ 이므로 $R^c \subset (P \cap Q)^c$, 따라서 성립하지 않는다.

15. 집합 $A_n = \{x | 3n - 1 \leq x \leq 9n + 6, n \text{은 자연수}\}$ 에 대하여 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \neq \phi$ 이 성립하는 n 의 최댓값을 구하시오. [배점 5, 상하]

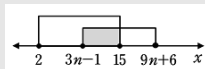
▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \neq \phi$ 이므로 $A_1 \cap A_n \neq \phi$
 $A_1 = \{x | 2 \leq x \leq 15\}$, $A_n = \{x | 3n - 1 \leq x \leq 9n + 6\}$
 A_1, A_n 을 수직선 위에 나타낼 때 아래와 같은 꼴이어야 문제의 조건을 만족시킨다.

따라서, $3n - 1 \leq 15, n \leq \frac{16}{3}$



$\therefore$ 최댓값은 $n = 5$ ($\because n$ 은 자연수)

16. 자연수를 원소로 하는 집합 S 가 “ $x \in S$ 이면 $8 - x \in S$ 이다.”를 만족시킬 때, 집합 S 의 개수는 ?

[배점 5, 상하]

- ㉠ 15 ㉡ 16 ㉢ 17 ㉣ 18 ㉤ 19

해설

$x, 8 - x$ 는 자연수이므로 $1 \leq x \leq 7$ 이고
 $x = 1$ 이면 $x = 7, x = 2$ 이면 $x = 6, x = 3$ 이면 $x = 5, x = 4$ 이면 $x = 4$ 이다.

㉠ 원소가 1개인 집합 : $\{4\} \Rightarrow 1$ 개

㉡ 원소가 2개인 집합 :

$\{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\} \Rightarrow 3$ 개

㉢ 원소가 3개인 집합 :

$\{1, 7, 4\}, \{2, 6, 4\}, \{3, 5, 4\} \Rightarrow 3$ 개

㉣ 원소가 4개인 집합 :

$\{1, 7, 2, 6\}, \{2, 6, 3, 5\}, \{3, 5, 1, 7\} \Rightarrow 3$ 개

㉤ 원소가 5개인 집합 :

$\{1, 7, 2, 6, 4\}, \{2, 6, 3, 5, 4\}, \{3, 5, 1, 7, 4\} \Rightarrow 3$ 개

㉥ 원소가 6개인 집합 :

$\{1, 7, 2, 6, 3, 5\} \Rightarrow 1$ 개

㉦ 원소가 7개인 집합 :

$\{1, 7, 2, 6, 3, 5, 4\} \Rightarrow 1$ 개

$\therefore 15$ 개

17. 실수 전체의 두 부분 집합 A, B 가 두 조건

- $1 \in A$
- $x \in A$ 이면 $x+1 \in A$ 이고 $x-1 \in B$

를 만족할 때, 다음 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ A 는 모든 자연수를 원소로 갖는다.
- ㉡ A 의 원소는 모두 B 의 원소이다.
- ㉢ B 는 최대 원소를 갖는다.
- ㉣ B 는 정수 전체 집합의 부분집합이다.

[배점 5, 상하]

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉠, ㉡, ㉣
- ③ ㉠, ㉡, ㉢
- ④ ㉠, ㉢, ㉣
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $x \in A$ 이면 $x+1 \in A$ 이고 $1 \in A$ 이므로
 $1+1=2 \in A, 2+1=3 \in A, \dots$
 $\therefore A \supset \{1, 2, 3, \dots\}$ (참)
 ㉡ $x \in A \rightarrow x+1 \in A \rightarrow (x+1)-1 \in B$
 $\therefore x \in A \rightarrow x \in B$ (참)
 ㉢ $B \supset \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 따라서 B 는 무한 집
 합이므로 최대 원소는 없다.
 ㉣ $\frac{1}{2} \in A$ 이면 B 에는 정수가 아닌 원소가 들어
 있게 되므로 거짓이다.(조건에서 $1 \in A$ 라고 해서
 1이외의 수가 A 의 원소가 될 수 없다는 의미는
 아니다.)

18. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. $p(n), p(n+1)$ 중
 어느 하나가 참이면 $p(n+2)$ 가 참임을 알았다. 명제
 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이기 위한 필요충
 분조건은? [배점 5, 상하]

- ① $p(1)$ 이 참이다.
- ② $p(2)$ 가 참이다.
- ③ $p(1)$ 과 $p(2)$ 가 참이다.
- ④ $p(1)$ 과 $p(3)$ 이 참이다.
- ⑤ $p(2)$ 와 $p(3)$ 이 참이다.

해설

$p(n)$ 또는 $p(n+1)$ 이 참 $\Rightarrow p(n+2)$ 가 참
 (i) $p(1)$ 은 참, $p(2)$ 는 거짓이라 하면,
 $p(1)$: 참 $\Rightarrow p(3)$: 참
 $p(2)$ 또는 $p(3)$: 참 $\Rightarrow p(4)$: 참
 이와 같이 계속하여 $n \neq 2$ 인 모든 자연수 n 에
 대하여 $p(n)$ 은 참이 된다.
 (ii) $p(1)$ 은 거짓, $p(2)$ 는 참이라 하면,
 $p(1)$ 또는 $p(2)$: 참 $\Rightarrow p(3)$: 참
 $p(2)$ 또는 $p(3)$: 참 $\Rightarrow p(4)$: 참
 이와 같이 계속하여 $n \neq 1$ 인 모든 자연수 n 에
 대하여 $p(n)$ 은 참이 된다.
 (iii) $p(1), p(2)$ 가 모두 참이라 하면,
 $p(3), p(4), \dots$ 도 계속 참이다.
 따라서, (i), (ii), (iii)에서 $p(n)$ 이 모든 자연수 n
 에 대하여 참이 되려면 $p(1), p(2)$ 모두 참이어야
 한다.

19. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 $A \cup B = U, A \cap B = \{2, 3\}$ 을 만족할 때, 집합 A, B 의 원소의 합을 각각 $S(A), S(B)$ 라 한다. 이 때, 이들의 곱 $S(A) \cdot S(B)$ 의 최댓값은? [배점 6, 상중]

- ① 49 ② 54 ③ 63
④ 81 ⑤ 100

해설

$S(A) = x, S(B) = y$ 라 하면 $S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$ 이므로 $x + y = S(A \cup B) + S(A \cap B) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (2 + 3) = 20$
 $S(A) \cdot S(B) = xy = x(20 - x) = -x^2 + 20x$
 $= -(x - 10)^2 + 100$
 $\therefore$ 구하는 최댓값은 100

해설

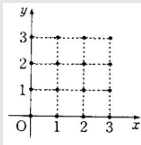
$S(A) = x, S(B) = y$ 라 하면 $x + y = 20$ 에서 산술평균 $\geq$ 기하평균 관계를 이용하여 $x + y \geq 2\sqrt{xy} \leftrightarrow 20 \geq 2\sqrt{xy} \leftrightarrow 10 \geq \sqrt{xy}$ 양변을 제곱하면 $100 \geq xy \therefore xy$ 의 최댓값은 100

20. x, y 가 0부터 3까지의 정수일 때, 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 의 집합을 A 라 하자. 만일 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4 에 대하여 $\square P_1 P_2 P_3 P_4$ 정사각형일 때, 집합 $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 를 정사각집합이라 하면, A 의 부분집합 중 정사각집합의 개수는?

[배점 6, 상중]

- ① 20 개 ② 22 개 ③ 24 개
④ 26 개 ⑤ 28 개

해설



그림의 16개의 점 중에서 4개를 선택

하여 만들 수 있는 정사각형의 개수를 구하면 된다. 한 변의 길이가 1인 정사각형은 9 개, 한 변의 길이가 2인 정사각형은 4개, 한 변의 길이가 3인 정사각형은 1 개, 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정사각형은 4개, 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 정사각형은 2 개 따라서 구하는 정사각집합의 개수는 $9 + 4 + 1 + 4 + 2 = 20$ (개)