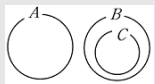


단원 종합 평가

1. 집합 A 와 B 가 서로소이고 $C \subset B$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? [배점 3, 중하]

- ① $A \cap C = \phi$ ② $A \cap C = C$
 ③ $A \cup C = A$ ④ $B \cup C = B$
 ⑤ $\{\{1\}, 1\} \subset A$

해설

$A \cap B = \phi, C \subset B$  $\therefore A \cap C = \phi, B \cup C = B$

2. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것은? [배점 3, 중하]

- ① $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$
 ② $(A - B) \cap (B - A) = \phi$
 ③ $(A - B) \cup (A - B^c) = A$
 ④ $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
 ⑤ $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cap C)$

해설

$(A - B) \cap (A - C) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap (B \cup C)^c = A - (B \cup C)$

3. 명제 $\sim p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim p$ 가 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은? [배점 3, 중하]

- ① $\sim q \rightarrow p$ ② $\sim q \rightarrow \sim r$
 ③ $p \rightarrow \sim r$ ④ $r \rightarrow q$
 ⑤ $q \rightarrow r$

해설

$\sim p \rightarrow q$ (T) 그의 대우 $\sim q \rightarrow p$ (T), $r \rightarrow \sim p$ (T) 그의 대우 $p \rightarrow \sim r$ (T) 또한 $r \rightarrow \sim p, \sim p \rightarrow q$ 이므로, $r \rightarrow q$ (T) 그의 대우 $\sim q \rightarrow \sim r$ (T)

4. 자연수 k 의 양의 배수의 집합을 A_k 라 하자. $(A_{12} \cup A_{18}) \subset A_k$ 인 k 의 최댓값을 M ($A_6 \cap A_8$) $\supset A_k$ 인 k 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 30

해설

$(A_{12} \cup A_{18}) \subset A_k$ 이므로 $A_{12} \subset A_k, A_{18} \subset A_k$ 따라서 k 는 12의 약수이면서 18의 약수이고 최대인 것이다. $\therefore M = 6 \leftarrow 12, 18$ 의 최대공약수, 또 $(A_6 \cap A_8) \supset A_k$ 이므로 $A_k \subset A_6, A_k \subset A_8$ 따라서, k 는 6의 배수이면서 8의 배수이고 최소인 것이다. $\therefore m = 24 \leftarrow 6, 8$ 의 최소공배수 $\therefore M + m = 30$

5. 두 집합 A, B 가 전체집합 U 의 부분집합일 때, 다음을 간단히 하면?

$$(A \cup B) \cap [(A^c \cap B^c)^c \cap (A^c \cap B)^c]$$

[배점 4, 중중]

- ① A ② B ③ U
 ④ $\emptyset$ ⑤ $A \cap B$

해설

$$(A \cup B) \cap [(A^c \cap B^c)^c \cap (A^c \cap B)^c] = (A \cup B) \cap [(A \cup B) \cap (A \cup B^c)] = (A \cup B) \cap [A \cup (B \cap B^c)] = (A \cup B) \cap A = A$$

6. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 P, Q 라 하자. 두 집합 P, Q 가 $P \cup Q = P$ 를 만족할 때, 다음 명제 중 항상 참인 것은? [배점 4, 중중]

- ① $p \rightarrow q$ ② $\sim p \rightarrow \sim q$
 ③ $\sim p \rightarrow q$ ④ $\sim q \rightarrow \sim p$
 ⑤ $p \rightarrow \sim p$

해설

$$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \rightarrow p \text{ (참)} \Rightarrow \sim p \rightarrow \sim q \text{ (참)}$$

7. 다음 보기 중 $a^2 + b^2 \neq 0$ 과 동치인 것을 모두 고르면? (단, a, b 는 실수)

- ㉠ $a^2 + b^2 = 0$
 ㉡ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
 ㉢ $ab \neq 0$
 ㉣ $a + b \neq 0$ 이고 $ab = 0$
 ㉤ $a^2 + b^2 > 0$

[배점 4, 중중]

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
 ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

$a^2 + b^2 \neq 0$ 은 a, b 중 적어도 하나는 0이 아니므로 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다.
 ㉠ $a^2 + b^2 = 0$ 이면 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.
 ㉡ $ab \neq 0$ 이면 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 이다.
 ㉢ $a + b \neq 0$ 이고 $ab = 0$ 이면 a, b 둘 중에 하나는 0이 아니다.
 ㉤ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다. 따라서 $a^2 + b^2 \neq 0$ 과 동치인 것은 ㉡, ㉤이다.

8. 세 집합 A, B, C 가 $A \cup B = C$, $B \cap C = C$ 를 만족할 때, 다음 중 두 집합 A, B 사이의 관계로 옳은 것은? [배점 5, 중상]

- ① $A \cap B = \emptyset$ ② $A \cup B = \emptyset$
 ③ $A^c \cup B^c = \emptyset$ ④ $B - A = \emptyset$
 ⑤ $A - B = \emptyset$

해설

$A \cup B = C$ 에서 $A \subset C, B \subset C \dots \textcircled{1}$
 $B \cap C = C$ 에서 $C \subset B \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $B = C$ 따라서 $A \subset C, B = C$ 이므로
 $A \subset B \therefore A - B = \emptyset$

9. $P(A) = \{x|x \subset A\}$ 라고 정의할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? [배점 5, 중상]

- ① $P(A) \supset A$ ② $P(A) \supset \{A\}$
 ③ $P(A) \supset \emptyset$ ④ $P(A) \ni \{A\}$
 ⑤ $P(A) \ni \emptyset$

해설

$A = \{a, b\}$ 일 때, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
 $\rightarrow P(A) \ni A,$
 $\therefore P(A) \supset \{A\}$
 $\rightarrow P(A) \supset \emptyset$ (공집합은 모든 집합의 부분집합)
 $\rightarrow P(A) \ni \emptyset$ ($\emptyset$ 이 원소이므로)

10. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A = \{2, 3\}$, $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$ 을 만족
 시키는 집합 B 의 개수는? [배점 5, 중상]

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개
 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c =$
 $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = B - A$
 따라서 $A - B \subset B - A$, $A - B$ 와 $B - A$ 는 서로
 소이므로 $A - B = \emptyset$, $A \subset B \therefore B$ 는 2, 3을
 포함하는 U 의 부분집합이므로 B 의 개수는 2^3 개

11. 다음 중 p 는 q 이기 위한 충분조건인 것은? [배점 5, 중상]

- ① $p : x = 1$ 이고 $y = 1$ $q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$
 ② $p : |x - 1| = 2$ $q : x^2 - 2x + 3 = 0$
 ③ $p : a > 3$ $q : a^2 > 9$
 ④ $p : a^2 = ab$ $q : a = b$
 ⑤ $p : |a| < |b|$ $q : a < b$

해설

$p \rightarrow q$ 이면 (진리집합 $P \subset$ 진리집합 Q)
 ① $P : x = 1, y = 1$ $Q : x = 1 \quad y = 1 \Rightarrow$ 필요충
 분조건
 ② $P : x = 3$ 또는 $x = -1$ $Q : x = 1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow$
 서로소
 ③ $P : a > 3$ $Q : a < -3$ 또는 $a > 3 \Rightarrow$ 충분조건
 ④ $P : a = 0$ 또는 $a = b$ $Q : a = b \Rightarrow$ 필요조건
 ⑤ $p \not\rightarrow q, q \rightarrow p$ (반례: $a = 2, b = -3$)

12. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

- ㉠ $p : |a| + |b| = 0 \quad q : ab = 0$
 ㉡ $p : (a-b)(b-c) = 0$
 $q : (a-b)^2 + (b-c)^2 = 0$
 ㉢ $p : 0 < x < y \quad q : x^2 < y^2$
 ㉣ $p : x < y \quad q : [x] < [y]$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

[배점 5, 중상]

- ① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢ ③ ㉠, ㉣
 ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $p : |a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 이고 $b = 0 \quad q : ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0 \therefore p \Rightarrow q$ 이고 $p \not\Leftarrow q$ 이므로 만족
 ㉡ $p : (a-b)(b-c) = 0 \quad a = b$ 또는 $b = c$
 $q : a = b$ 그리고 $b = c \therefore p \not\Leftarrow q$ 이고 $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족 한다.
 ㉢ $p \Rightarrow q (\because x, y$ 모두 양수) $p \not\Leftarrow q (\because x, y$ 모두 음수이거나 서로 부호가 다를 때 참이 아닐 수 있다.) $\therefore$ 만족
 ㉣ $p \not\Leftarrow q (\because x = 1, y = 1.5$ 일 때 $[1] = [1.5] = 1$ 일 수 있다.) $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족

13. 전체집합이 $U = \{x | 1 \leq x \leq 10, x \text{는 정수}\}$ 이고, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, S \cap A^c = \emptyset, n(S \cap B) = 3$ 일 때, 집합 S 의 개수는 ?

[배점 5, 상하]

- ① 4 개 ② 8 개 ③ 16 개
 ④ 32 개 ⑤ 64 개

해설

$S \cap B$ 는 $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$ 가 될 수 있다. $S \cap A^c = S - A = \emptyset$ 이므로, $S \subset A$

따라서 $S \cap B = \{1, 2, 3\}$ 인 경우, S 는 1, 2, 3 을 원소로 갖고 4 를 원소로 갖지 않는 A 의 부분집합이 되어 그 개수는 집합 $\{5, 6\}$ 의 부분집합의 개수와 같다. $S \cap B = \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$ 인 경우도 같은 수만큼의 부분집합이 있으므로, S 의 개수는 $2^2 \times 4 = 16$ (개)이다.

14. 집합 A, B, C 가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 C 의 개수는?

- ㉠ $A = B \cup C$ ㉡ $n(A) = 7$
 ㉢ $n(B) = 4$

[배점 5, 상하]

- ① 32 ② 16 ③ 8 ④ 4 ⑤ 2

해설

집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 라 놓으면 집합 A 의 원소는 7개이고, $A = B \cup C$ 이므로 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, x_1, x_2, x_3\}$ 이 때 집합 C 는 x_1, x_2, x_3 을 반드시 원소로 가져야 하므로 $\{x_1, x_2, x_3\} \subset C \subset A$
 집합 C 는 x_1, x_2, x_3 을 포함하는 A 의 부분집합 이므로 그 개수는 $2^{7-3} = 2^4 = 16$

15. 다음 보기 중 두 조건 p, q 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것의 개수는?

- ㉠ $p: xy + 1 > x + y > 2 \quad q: x > 1, y > 1$
 ㉡ $p: x^2 > y^2 \quad q: |x| > |y|$
 ㉢ $p: |x| + |y| = 0 \quad q: x^2 + y^2 = 0$
 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 ㉤ $p: (A \cup B) \cap (B - A)^C = A \cup B, \quad q: B \subset A$
 ㉥ $p: (A \cup B) - (A \cap B) = B, \quad q: A - B = \phi$
 ㉦ $p: (A \cup B) - (A \cap B) = B, \quad q: A^C = U$

[배점 5, 상하]

해설

- ㉠, ㉡, ㉢, ㉤, ㉥이 필요충분조건이다.
 ㉠: $xy + 1 > x + y > 2 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1, y > 1$ 또는 $x < 1, y < 1$
 그런데 $x + y > 2$ 이므로 $x > 1, y > 1 \therefore p \Rightarrow q$ 이고 역도 성립한다.
 ㉤ $(A \cup B) - (A \cap B) = B \Leftrightarrow A = \phi$

16. 민주, 한결, 은하, 겨레 4명의 학생은 각자가 적당한 시간에 봉사활동에 다녀오기로 하였으나 그 중 한명이 참석하지 못하였다. 그런데 네 명의 학생은 아래와 같이 서로 엇갈린 주장을 하고 있다. 이 진술 중 오직 하나만이 옳은 것일 때, 참석하지 못한 학생과 옳게 진술한 학생은?

민주: 한결이가 빠졌어.
 한결: 민주가 한 말은 거짓말이야.
 은하: 민주가 빠졌어.
 겨레: 나는 안 빠졌어.

[배점 5, 상하]

- ㉠ 겨레, 한결 ㉡ 겨레, 민주
 ㉢ 겨레, 은하 ㉣ 민주, 한결
 ㉤ 민주, 은하

해설

- ㉠ 민주가 참: 한결, 겨레가 빠진것이 되어 모순
 ㉡ 한결이 참: 겨레가 빠짐
 ㉢ 은하가 참: 민주, 겨레의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
 ㉣ 겨레가 참: 민주, 한결의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
 $\therefore$ 한결의 진술이 참, 겨레가 참석하지 못함.

17. 다음 명제 ㉠, ㉡, ㉢가 각각 부등식 $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이기 위한 무슨 조건인지 순서대로 적으면? (단, a, b, c 는 실수)

- ㉠ a, b, c 중 적어도 하나는 1보다 크다.
 ㉡ a, b, c 의 최댓값이 1보다 크다.
 ㉢ a, b, c 의 최솟값이 1보다 크다.

[배점 5, 상하]

- ① 필요, 충분, 필요충분
 ② 충분, 필요충분, 충분
 ③ 필요, 필요충분, 충분
 ④ 충분, 필요, 필요충분
 ⑤ 필요, 필요, 충분

해설

㉠ $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이면, $a-1, b-1, c-1$ 중 하나 또는 셋이 양수이므로 필요조건 역으로 $a=2, b=2, c=-3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1) < 0$ 이므로 충분조건은 아니다. $\therefore$ 필요조건

㉡ $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이면 a, b, c 중 하나 또는 셋이 1 보다 크므로 최댓값은 1 보다 크다. 역으로 $a=2, b=2, c=-3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1) < 0$ 이므로 충분조건은 아니다. $\therefore$ 필요조건

㉢ a, b, c 의 최솟값이 1 보다 크면 $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이므로 충분조건 역으로 $a=2, b=0, c=0$ 이면 최솟값은 0 이므로 필요조건은 아니다. $\therefore$ 충분조건

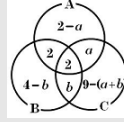
18. 수학 문제집이 A, B, C 세 종류가 있다. 각 문제집을 갖고 있는 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 할 때, $n(A) = 6, n(B) = 8, n(C) = 11$ 이고 $n(A \cap B) = 4, n(A \cap B \cap C) = 2$ 이다. 세 문제집 중 적어도 한 문제집을 갖고 있는 학생수를 x 라 할 때, x 의 최솟값을 구하면? [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$n(A \cap B \cap C^c)$
 $= n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 4 - 2 = 2$ 이므로
 $n(A \cap B^c \cap C) = a, n(A^c \cap B \cap C) = b$ 라 하면
 벤 다이어그램을 그려서 나누어지는 7 개 부분의 원소의 개수는 다음 그림과 같다.



이 때, $a \geq 0, b \geq 0, 2-a \geq 0, 4-b \geq 0, 9-(a+b) \geq 0$ 이므로 4개의 부등식에서 $0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 4$ 이고 $\therefore 0 \leq a+b \leq 6$ 이것은 마지막 부등식을 만족시킨다.

$x = n(A \cup B \cup C) = 19 - (a+b)$ 이므로 (그림에서 7개 부분을 모두 더한 값이다.)

$\therefore 13 \leq x \leq 19$

x 의 최솟값은 13이다.

19. 자연수를 원소로 하는 두 집합 $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}, N = \{a_1+d, a_2+d, a_3+d, a_4+d, a_5+d, a_6+d\}$ 가 있다. $M \cap N = \{4, 7, 9\}$ 이고, M 의 원소의 합은 32이며, $M \cup N$ 의 원소의 합이 62일 때, d 의 값을 구하라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

4, 7, 9가 M 의 원소이므로, 나머지 원소를 b_1, b_2, b_3 라 하면, $M = \{4, 7, 9, b_1, b_2, b_3\}$
 $N = \{4+d, 7+d, 9+d, b_1+d, b_2+d, b_3+d\}$
 M 의 원소의 합이 32이므로,

$$4+7+9+b_1+b_2+b_3=32 \therefore b_1+b_2+b_3=12 \dots \dots \textcircled{㉠}$$

또 $M \cup N$ 의 원소의 합이 62이므로, $32 + (4+d) + (7+d) + (9+d) + (b_1+d) + (b_2+d) + (b_3+d) - (4+7+9) = 62 \therefore (b_1+b_2+b_3) + 6d = 30 \dots \dots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉡}$ 에 $\textcircled{㉠}$ 을 대입하면, $12 + 6d = 30 \therefore d = 3$

해설

$\textcircled{㉠}$ 50명의 생일이 12달에 가장 골고루 퍼져 있을 때, $50 = 12 \times 4 + 2$ 이므로 매달 4명씩 생일이 있고 나머지 2명은 어느 달인가에 추가되어야 하므로, 5명 이상의 생일이 있는 달이 반드시 존재한다.

$\textcircled{㉡}$ 50명 모두 특정한 달에는 생일이 있지 않을 수도 있으므로 거짓이다.

$\textcircled{㉢}$ $\textcircled{㉠}$ 와 마찬가지로 생각해 보면, 50명의 생일이 일곱 요일에 가장 골고루 퍼져 있을 때는 $50 = 7 \times 7 + 1$ 이므로 어느 요일인가에 8명의 생일이 있다. 따라서, 참이다.

$\textcircled{㉣}$ 어느 특정한 날에 생일이 같은 학생은 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있다.

그러므로 위의 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$, $\textcircled{㉢}$, $\textcircled{㉣}$ 중에서 항상 맞는 것은 $\textcircled{㉠}$ 과 $\textcircled{㉢}$ 이다.

20. 학생 수가 50 명인 학급에서 생일을 조사하였을 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?

- $\textcircled{㉠}$ 5명 이상의 생일이 있는 달이 있다.
- $\textcircled{㉡}$ 모든 달에 생일이 있다.
- $\textcircled{㉢}$ 8명 이상의 생일이 있는 요일이 있다.
- $\textcircled{㉣}$ 생일이 같은 학생이 존재한다.

[배점 6, 상중]

- ① $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ $\textcircled{㉡}$ $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉢}$ ③ $\textcircled{㉢}$, $\textcircled{㉣}$
- ④ $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$, $\textcircled{㉢}$ ⑤ $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉢}$, $\textcircled{㉣}$