

단원 종합 평가

1. 전체 집합 U 의 부분집합 A, B 의 원소의 개수가 다음 표와 같을 때, 빈 칸의 원소의 개수를 구하시오.

| [집합][원소 의 개수] | |
|-------------------|----|
| U | 53 |
| B | 28 |
| A | 16 |
| $A \cap B$ | 8 |
| B^c | ㉠ |
| $A \cup B$ | ㉡ |
| $A \cap B^c$ | ㉢ |
| $A \cup B^c$ | ㉣ |

[배점 2, 하중]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠ 25

▷ 정답: ㉡ 36

▷ 정답: ㉢ 8

▷ 정답: ㉣ 33

해설

$$n(B^c) = n(U) - n(B) = 25$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 36$$

$$n(A \cap B^c) = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 8$$

$$n(A \cup B^c) = n(A) + n(B^c) - n(A \cap B^c) = 33$$

2. 다음 중 거짓인 명제는? [배점 2, 하중]

① 직사각형은 사다리꼴이다.

② $x > 3$ 이면 $x > 5$ 이다.

③ $a = b$ 이면 $a^3 = b^3$ 이다.

④ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다.

⑤ $(x-3)(y-5) = 0$ 이면 $x = 3$ 또는 $y = 5$ 이다.

해설

반례: $x = 4$

3. 다음 명제 중 '이'가 참인 것을 고르면? (a, b, x, y 는 모두 실수) [배점 2, 하중]

① $a = 1$ 이면, $a^2 = a$

② $a = b$ 이면, $a^2 = b^2$

③ xy 가 홀수 이면, $x + y$ 가 짝수

④ $\triangle ABC$ 가 정삼각형이면, $\angle B = \angle C$

⑤ 두 집합 A, B 에 대하여, $A \supset B$ 이면,
 $A \cup B = A$

해설

‘이’와 ‘역’은 서로 대우관계이다. 따라서 주어진 명제의 ‘역’이 참이면 ‘이’도 참이 된다.

- ① 역: $a^2 = a$ 이면 $a = 1$ 이다. (거짓, 반례: $a = 0$)
- ② 역: $a^2 = b^2$ 이면 $a = b$ 이다. (거짓, 반례: $a = 1, b = -1$)
- ③ 역: $x + y$ 가 짝수이면, xy 는 홀수이다. (거짓, x, y 모두 짝수인 경우 xy 는 짝수이다.)
- ④ 역: $\angle B = \angle C$ 이면 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다. (거짓, 두 각이 같으면 이등변삼각형이다.)
- ⑤ 역: $A \cup B = A$ 이면 $A \supset B$ 이다. (참)

4. 다음에서 조건 p 는 조건 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

p : a, b 는 모두 짝수 q : $a + b$ 는 짝수

[배점 2, 하중]

▶ **답:**

▶ **정답:** 충분

해설

a, b 는 모두 짝수 $\rightarrow a + b$ 는 짝수 (역은 성립하지 않음) 증명 $a = 2m, b = 2n$ (n, m 은 자연수) 이면, $a + b = 2m + 2n = 2(m + n)$ 이므로 짝수이다. 한편, $a = 3, b = 3$ 일 때 $a + b = 6$ 이므로 짝수이지만, a, b 는 모두 홀수이다. $\therefore p$ 는 q 의 충분조건이다.

5. 다음 중 $A \subset B$ 와 같은 것이 아닌 것은?

[배점 3, 하상]

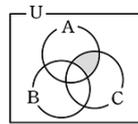
- ① $A \cup B = B$
- ② $A^c \cup B = U$
- ③ $A - B = \emptyset$
- ④ $B - A = B$
- ⑤ $B^c \subset A^c$

해설

$A \subset B$

- $\leftrightarrow A \cup B = B$
- $\leftrightarrow A - B = \emptyset$
- $\leftrightarrow B^c \subset A^c$
- $\leftrightarrow A^c \cup B = U$

6. 아래쪽 벤 다이어그램에서 색칠된 부분을 옳게 나타낸 것은 어느 것인가?



[배점 3, 하상]

- ① $A - (B \cup C)$
- ② $B - (A \cup C)$
- ③ $B - (A \cap C)$
- ④ $(B \cup C) - A$
- ⑤ $(A \cap C) - B$

해설

이런 문제의 경우 직관적인 파악이 필요하다. 즉 그림에서 색칠된 부분의 $A \cap C$ 에서 제외된 부분을 주목해 보면 색칠된 부분은 $(A \cap C) - B$ 임을 알 수 있다.

7. 다음 중 $n(A \cap B^c)$ 의 값과 같은 것은?
[배점 3, 하상]

- ① $n(A) - n(B)$ ② $n(A) - n(A - B)$
 ③ $n(A \cup B) - n(A)$ ④ $n(A) - n(A \cap B)$
 ⑤ $n(U) - n(A)$

해설

$A \cap B^c = A - B = A - (A \cap B)$ 이고, $(A \cap B) \subset A$
 이므로 $n(A \cap B^c) = n(A - B) = n(A - (A \cap B))$
 $= n(A) - n(A \cap B)$

8. 명제 “ x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.”는 거짓이다. 다음 중에서 반례인 것은?
[배점 3, 하상]

- ① $x = 1$ ② $x = 12$ ③ $x = 10$
 ④ $x = 8$ ⑤ $x = 4$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다. 즉 $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

9. 다음 중 명제의 대우가 참인 것은? [배점 3, 하상]

- ① x 가 유리수이면 x^2 은 유리수이다.
 ② 두 직사각형의 넓이가 같으면 두 직사각형은 합동이다.
 ③ $x^2 = y^2$ 이면 $x = y$ 이다.
 ④ 닮음인 두 삼각형은 합동이다.
 ⑤ x 또는 y 가 무리수이면 $x + y$ 가 무리수이다.

해설

명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

10. 두 집합 $A = \{x | x \text{는 } 7 \text{이하의 홀수}\}$, $B = \{x | x \text{는 } 12 \text{이하의 홀수}\}$ 에 대하여 $A \subset X$ 를 만족하는 집합 X 가 집합 B 의 진부분집합일 때, 집합 X 의 개수는?
[배점 3, 중하]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 7 ⑤ 8

해설

$A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ $A \subset X \subset B$ ($X \neq B$) 이어야 하므로 X 는 1, 3, 5, 7을 포함하는 B 의 진부분집합이다. $\therefore 2^2 - 1 = 3$ (개)

11. 35명의 학생들을 대상으로 수학과 과학의 선호도를 조사 하였더니, 수학과 과학을 모두 좋아하는 학생이 17명, 수학을 좋아하지 않는 학생이 12명이었다. 이 때, 수학만 좋아하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 6명

해설

수학을 좋아하는 학생의 집합을 A , 과학을 좋아하는 학생의 집합을 B 라 하면 구하는 것은 $n(A-B)$
 $n(U) = 35, n(A \cap B) = 17, n(A^c) = 12$
 $n(A) = n(U) - n(A^c) = 35 - 12 = 23$
 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 23 - 17 = 6$

12. $A = \{a, b\}$ 이고, $2^A = \{X | X \subset A\}$ 로 정할 때, 다음 중 옳은 것은? [배점 3, 중하]

- ① $\{A\} = 2^A$ ② $\{A\} \in 2^A$ ③ $\{A\} \subset 2^A$
 ④ $A \subset 2^A$ ⑤ $\{A\} \not\subset 2^A$

해설

2^A 는 A 의 부분집합을 원소로 하는 집합이므로
 $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$
 따라서 $\{A\} \subset 2^A$ 이다.

13. 다음 조건 p 는 조건 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라. (단, a, b 는 실수) (i) $p : a, b$ 는 유리수 $q : a + b, ab$ 는 유리수 (ii) $p : x$ 는 3의 배수 $q : x$ 는 6의 배수

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 필요

14. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다. $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은? [배점 3, 중하]

- ① $P \cup Q = U$ ② $P \cap Q = \emptyset$
 ③ $Q \subset P$ ④ $P \subset Q$
 ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q \Rightarrow P^c \subset Q^c \Rightarrow Q \subset P$

15. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B) \cap (A-C)$ 를 변형 한 것으로서 틀린 것은?

[배점 4, 중중]

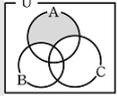
- ① $A - (B \cup C)$ ② $(A - B) - C$
 ③ $A \cap (B \cup C)^c$ ④ $A - (B - C)$
 ⑤ $A \cap (B^c \cap C^c)$

해설

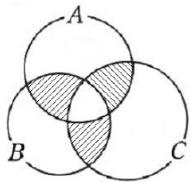
$$\begin{aligned}
 & (A - B) \cap (A - C) \\
 &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) \\
 &= A \cap (B^c \cap C^c) \quad [\leftrightarrow (A \cap B^c) \cap C^c = (A - B) - C] \\
 &] \\
 &= A \cap (B \cup C)^c \\
 &= A - (B \cup C)
 \end{aligned}$$

위에서 ①, ②, ③, ⑤가 성립함을 알 수 있다.

해설

$(A - B) \cap (A - C)$ 를 벤다이어그램으로 나타내면,

 벤다이어그램을 보면서 비교하는 것도
 좋다.

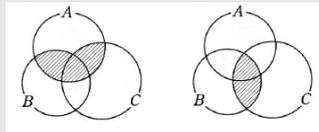
16. 두 집합 X, Y 에 대하여 $X \star Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 라고 정의할 때, 아래의 벤다이어그램에서 빗금 친 부분을 나타내는 것은?



[배점 4, 중중]

- ① $\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\} \star (B \cap C)$
- ② $\{(A \cup B) \cap (A \cup C)\} \star (B \cap C)$
- ③ $\{(A \cap B) \star (A \cap C)\} \cup (B \cap C)$
- ④ $\{(A \cup B) \star (A \cup C)\} \cup (B \cap C)$
- ⑤ $\{(A \cap B) \star (A \cap C)\} \cup (B \cap C)$

해설



$$\begin{aligned}
 & (A \cap B) \cup (A \cap C) = p, \quad B \cap C = q, \\
 & \therefore X \star Y = (X \cup Y) - (X \cap Y) \\
 &= (X \cup Y) - (Z \cap Y) \\
 & \{(A \cap B) \cup (A \cap C)\} \star (B \cap C) \Rightarrow p \star q = \\
 & (p - q) \cup (q - p)
 \end{aligned}$$

17. $x \geq a$ 가 $-1 < x < 1$ 의 필요조건이 되기 위한 a 의 최댓값을 구하면? [배점 4, 중중]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ -2
- ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -5

해설

$\{x | -1 < x < 1\} \subset \{x | x \geq a\}$ 이어야 하므로 $a \leq -1$ 따라서, a 의 최댓값은 -1 이다.

18. 다음 보기 중 $a^2 + b^2 \neq 0$ 과 동치인 것을 모두 고르면?
(단, a, b 는 실수)

- ㉠ $a^2 + b^2 = 0$
- ㉡ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
- ㉢ $ab \neq 0$
- ㉣ $a + b \neq 0$ 이고 $ab = 0$
- ㉤ $a^2 + b^2 > 0$

[배점 4, 중중]

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
- ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢, ㉤

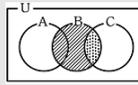
해설

$a^2 + b^2 \neq 0$ 은 a, b 중 적어도 하나는 0이 아니므로 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다.
 ㉠ $a^2 + b^2 = 0$ 이면 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.
 ㉢ $ab \neq 0$ 이면 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 이다.
 ㉣ $a + b \neq 0$ 이고 $ab = 0$ 이면 a, b 둘 중에 하나는 0이 아니다.
 ㉤ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다. 따라서 $a^2 + b^2 \neq 0$ 과 동치인 것은 ㉡, ㉤이다.

19. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \subset C^c$ 이고 $n(B) = 5, n(B - A) = 4, n(B - C) = 3$ 이다. 이 때, 집합 $B - (A \cup C)$ 의 원소의 개수는? [배점 5, 중상]

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 6 개
- ④ 7 개 ⑤ 없다.

해설



$A \subset C^c \Leftrightarrow A \cap C = \emptyset$ 이므로 위의 벤 다이어그램에서 점이 있는 부분은 집합 $B - A$ 를 나타내고 빗금이 있는 부분은 집합 $B - C$ 를 나타내고 둘 다 있는 부분은 집합 $B - (A \cup C)$ 를 나타낸다.
 $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 4 \therefore n(A \cap B) = 1$
 $n(B - C) = n(B) - n(B \cap C) = 3 \therefore n(B \cap C) = 2$
 즉 $B - (A \cup C) = n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) = 5 - 1 - 2 = 2$

20. 다음은 명제 '세 자연수 a, b, c 에 대하여, $a^2 + b^2 = c^2$ 이면, a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수이다.'의 참, 거짓을 대우를 이용하여 판별하는 과정이다.

주어진 명제의 대우는
 '세 자연수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 모두 3의 배수가 아니면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ ' 이므로 $a^2 + b^2 = 3m + [\text{㉠}], c^2 = 3n + [\text{㉡}] \therefore a^2 + b^2 \neq c^2$ (단, m, n 은 음이 아닌 정수) 따라서, 대우가 [㉢] 이므로 주어진 명제도 [㉢]이다.

위의 과정에서, ㉠, ㉡, ㉢에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 바르게 나열한 것은? [배점 5, 중상]

- ① 1, 0, 참 ② 1, 2, 거짓 ③ 2, 1, 참
- ④ 2, 0, 참 ⑤ 0, 1, 참

해설

(대우)" a, b, c 모두 3의 배수가 아니라면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ " 이것의 참, 거짓을 증명하는 과정이다. $a = 3p \pm 1, b = 3q \pm 1, c = 3r \pm 1$ 이면 $a^2 = 3(3p^2 \pm 2p) + 1, b^2 = 3(3q^2 \pm 2q) + 1$ 이므로 $a^2 + b^2 = 3m + 2$ (m 은 음이 아닌 정수)의 꼴이다. $\therefore [\textcircled{1}] = 2$ 그리고 $c^2 = 3(3r^2 \pm 2r) + 1$ 이므로 $c^2 = 3n + 1$ (n 은 음이 아닌 정수)의 꼴이다. $\therefore [\textcircled{2}] = 1$. $a^2 + b^2 \neq c^2$ 따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. $\therefore [\textcircled{3}] = \text{참}$