

단원 종합 평가

1. 다음 명제 중에서 그 부정이 참인 것을 모두 고르면?
[배점 2, 하중]

- ① $2 < \sqrt{6} \leq 3$
 ② 2는 소수가 아니다.
 ③ $2 > 3$ 또는 $3 \leq 5$
 ④ $2 \leq \sqrt{3} < 3$
 ⑤ 24는 4와 6의 공배수이다.

해설

거짓인 명제의 부정은 참이므로 거짓인 명제를 찾으면 된다. ①, ③, ⑤는 참인 명제이고, 2는 소수이고 $\sqrt{3} = 1.7 \dots$ 이므로 ②, ④는 거짓인 명제이다.

2. 다음 중 거짓인 명제는? [배점 2, 하중]

- ① 직사각형은 사다리꼴이다.
 ② $x > 3$ 이면 $x > 5$ 이다.
 ③ $a = b$ 이면 $a^3 = b^3$ 이다.
 ④ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다.
 ⑤ $(x-3)(y-5) = 0$ 이면 $x = 3$ 또는 $y = 5$ 이다.

해설

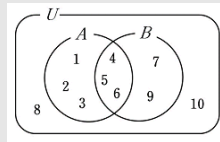
반례: $x = 4$

3. 집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 9\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (단, $n(A)$ 는 집합 A 의 원소의 개수이다.) [배점 2, 하중]

- ① $n(A^c \cap B^c) = 7$
 ② $A \cap B^c = \{1, 2, 3\}$
 ③ $B - A = \{7, 9\}$
 ④ $n(A \cap B) = 3$
 ⑤ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

해설

벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 2$$

4. 세 집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 옳은 것으로만 짝지어진 것은?

- ㉠ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
 ㉡ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 ㉢ $A - B = A \cap B^c$
 ㉣ $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$

[배점 2, 하중]

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉣
 ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

- ㉔ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 ㉕ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

5. 명제 ‘ $p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다’가 참일 때, 두 집합 $P = \{x|p(x)\}$, $Q = \{x|q(x)\}$ 사이의 관계로 다음 중 옳은 것은?
 [배점 3, 하상]

- ① $Q \subset P$ ② $Q^c \subset P$
 ③ $P \subset Q^c$ ④ $P \cup Q = P$
 ⑤ $P \subset Q$

해설

‘ $p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다’가 참일 때, 즉, $p \Rightarrow q$ 이면 진리집합의 포함관계는 $P \subset Q$

6. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)
 [배점 3, 하상]

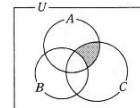
- ① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.
 ② $\sqrt{(-3)^2} = -3$
 ③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.
 ④ $|x + y| = |x - y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.
 ⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

- ① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
 ② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
 ③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.
 ④ $|x + y| = |x - y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x + y)^2 = (x - y)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
 ⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

7. 다음 벤다이어그램의 어두운 부분을 나타내는 집합이

아닌 것은?

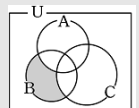


[배점 3, 하상]

- ① $B \cap (A \cup C)^c$
 ② $B^c \cap (A \cap C)$
 ③ $(A \cap C) - B$
 ④ $(B \cup C) \cap (A - B)$
 ⑤ $(A \cap C) - (B \cap C)$

해설

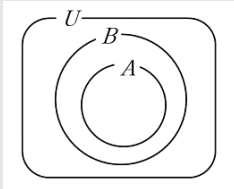
- ① $B \cap (A \cup C)^c = B - (A \cup C)$



8. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은? (단, $U \neq \emptyset$) [배점 3, 하상]

- ① $A \cup B = B$
 ② $A \cap B = A$
 ③ $A - B = \emptyset$
 ④ $B^c \subset A^c$
 ⑤ $(A \cup B) - (A \cap B) = B$

해설



$A \subset B$ 이므로 ①②③④ :

참

⑤ : $(A \cup B) - (A \cap B) = B - A$

9. 다음 중 $n(A \cap B^c)$ 의 값과 같은 것은? [배점 3, 하상]

- ① $n(A) - n(B)$ ② $n(A) - n(A - B)$
 ③ $n(A \cup B) - n(A)$ ④ $n(A) - n(A \cap B)$
 ⑤ $n(U) - n(A)$

해설

$A \cap B^c = A - B = A - (A \cap B)$ 이고, $(A \cap B) \subset A$ 이므로 $n(A \cap B^c) = n(A - B) = n(A - (A \cap B)) = n(A) - n(A \cap B)$

10. 실수 전체집합에 대하여 세 조건 p, q, r 이 아래와 같을 때 다음 중 참인 명제는?

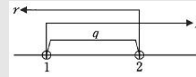
$$p : x > 1, \quad q : 1 < x < 2, \quad r : x < 2$$

[배점 3, 중하]

- ① $p \rightarrow q$ ② $p \rightarrow r$
 ③ $q \rightarrow r$ ④ $r \rightarrow p$
 ⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$$p : x > 1, \quad q : 1 < x < 2, \quad r : x < 2$$



$\therefore Q \subset P, Q \subset R$ 이므로, $q \rightarrow p, q \rightarrow r$ (참)

11. 명제 「 $p \rightarrow \sim q$ 」의 역이 참일 때, 반드시 참인 명제는? [배점 3, 중하]

- ① $p \rightarrow q$ ② $\sim p \rightarrow q$
 ③ $\sim p \rightarrow \sim q$ ④ $\sim q \rightarrow p$
 ⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

주어진 명제의 역 「 $\sim q \rightarrow p$ 」가 참이므로, 반드시 참인 명제는 역의 대우인 「 $\sim p \rightarrow q$ 」도 참이다.

12. 다음 두 진술이 모두 참이라 할 때 다음 중 옳은 것은?

- ㉠ 수학을 잘하는 학생은 머리가 좋다.
 ㉡ 수학을 잘하는 학생은 물리 또는 컴퓨터를 잘한다.

[배점 3, 중하]

- ① 수학을 잘하는 학생은 물리를 잘한다.
 ② 컴퓨터를 잘하는 학생은 머리가 좋다.
 ③ 머리가 좋은 학생은 물리를 잘 한다.
 ④ 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.
 ⑤ 물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

해설

p : 수학을 잘하는 학생, q : 머리가 좋다, r : 물리 또는 컴퓨터를 잘 한다. $p \Rightarrow q, p \Rightarrow r$ 에서 대우명제도 참이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ 에서 '머리가 좋지 않은 학생은 수학을 잘 못한다.' $\sim r \Rightarrow \sim p$ 에서 '물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.'

13. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 성립하지 않는 것은? [배점 3, 중하]

- ① $A \cap (A \cup B) = A$
 ② $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 ③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A, A \cup B = B$ 이다.
 ④ $(A - B) - C = (A - C) - B = A - (B \cup C)$
 ⑤ $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cap C)$

해설

$$\begin{aligned} \textcircled{5} (A - B) \cap (A - C) &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = \\ &= A \cap (B^c \cap C^c) = A - (B \cup C) \end{aligned}$$

14. 두 집합 $A = \{x | x \text{는 } 7 \text{이하의 홀수}\}, B = \{x | x \text{는 } 12 \text{이하의 홀수}\}$ 에 대하여 $A \subset X$ 를 만족하는 집합 X 가 집합 B 의 진부분집합일 때, 집합 X 의 개수는? [배점 3, 중하]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 7 ⑤ 8

해설

$A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ $A \subset X \subset B$ ($X \neq B$) 이어야 하므로 X 는 1, 3, 5, 7을 포함하는 B 의 진부분집합이다. $\therefore 2^2 - 1 = 3(\text{개})$

15. 집합 $A = \{\phi, 1, \{1, 2\}\}$ 에 대하여 $P(A) = \{X | X \subset A\}$ 라 정의 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는?

- ㉠ $\phi \in P(A)$ ㉡ $A \subset P(A)$
 ㉢ $A \in P(A)$ ㉣ $\{1\} \subset P(A)$
 ㉤ $\{1, 2\} \in P(A)$

[배점 3, 중하]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$P(A)$ 는 A 의 부분집합들을 원소로 하는 집합이다.
 $\textcircled{1} A \in P(A) \textcircled{2} \{1\} \in P(A) \textcircled{3} \{\{1, 2\}\} \in P(A)$
 $\therefore \textcircled{1}, \textcircled{2}$ 만 옳다.

16. 집합 A 와 B 가 서로소이고 $C \subset B$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? [배점 3, 중하]

- $\textcircled{1} A \cap C = \phi$ $\textcircled{2} A \cap C = C$
 $\textcircled{3} A \cup C = A$ $\textcircled{4} B \cup C = B$
 $\textcircled{5} \{\{1\}, 1\} \subset A$

해설

$A \cap B = \phi, C \subset B$  $\therefore A \cap C = \phi, B \cup C = B$

17. 명제 $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$ 이면 a, b, c 중에 서로 같은 두 수가 있다.'의 대우는? [배점 4, 중중]

- $\textcircled{1} a = b = c$ 이면 $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$ 이다.
 $\textcircled{2} (a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 이면 a, b, c 가 모두 서로 다른 수이다.
 $\textcircled{3} a, b, c$ 가 모두 서로 다른 수이면 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 이다.
 $\textcircled{4} a, b, c$ 가 모두 서로 같은 수이면 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 이다.
 $\textcircled{5} a \neq b \neq c$ 이면 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 이다.

해설

' a, b, c 중에 서로 같은 두 수가 있다.' 이면 ' $a = b$ 또는 $b = c$ 또는 $a = c$ ' 이므로 이것의 부정은 ' $a \neq b$ 이고 $b \neq c$ 이고 $a \neq c$ ' 이다. 즉, ' a, b, c 는 모두 서로 다른 수이다.'
 또, $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$ 의 부정은 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 이므로 주어진 명제의 대우는 ' a, b, c 가 모두 서로 다른 수이면 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 이다.'

18. 다음 중 그 역이 거짓인 명제를 찾으려면?

[배점 4, 중중]

- $\textcircled{1}$ 두 집합 A, B 에 대하여 $A \supset B$ 이면 $A \cup B = A$ 이다.
 $\textcircled{2} x > 0$ 이고 $y > 0$ 이면 $x + y > 0$ 이다.
 $\textcircled{3} x$ 가 3 의 배수이면 x 는 9 의 배수이다.
 $\textcircled{4} xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.
 $\textcircled{5} x^2 + y^2 \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.

해설

- $\textcircled{1}$ 두 집합 A, B 에 대하여 $A \supset B$ 이면 $A \cup B = A$ 이다. (참)
 $\textcircled{2} x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이면 $x + y \leq 0$ 이다. $\Rightarrow$ 반례 : $x = -3, y = 5$ (거짓)
 $\textcircled{3} x$ 가 3 의 배수가 아니면 x 는 9 의 배수가 아니다. (참)
 $\textcircled{4} xz \neq yz$ 이면 $x \neq y$ 이다. (참)
 $\textcircled{5} x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다. (참)

19. 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

주어진 명제의 (가)을(를) 구하여 보면 (가) : ' n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.'이 때, n 이 홀수이므로 $n = (나)(k는 0 또는 자연수)$ 이 때, $n^2 = (나)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ 여기서 $2(2k^2 + 2k)$ 는 (다)이므로 n^2 은 홀수이다. $\therefore$ (가)가(이) 참이므로 주어진 명제도 참이다.

[배점 4, 중중]

- ① 역, $2k+1$, 0 또는 짝수
 ② 이, $2k-1$, 홀수
 ③ 대우, $2k+1$, 0 또는 짝수
 ④ 대우, $2k-1$, 0 또는 홀수
 ⑤ 역, $2k+1$, 0 또는 홀수

해설

주어진 증명과정은 '명제가 참이면 그 대우도 참이다'라는 성질을 이용한 것이므로 $\therefore$ (가) : 대우 n 이 홀수이므로 $\therefore$ (나) : $2k+1$
 $2(2k^2 + 2k)$ 는 $2 \times$ (정수)의 형태이므로 $\therefore$ (다) : 0 또는 짝수

20. $[(A^c \cup B^c) \cap (A \cap B^c)^c]^c \cup B = B$ 일 때, 다음 중 옳은 것은? [배점 4, 중중]

- ① $B - A = \emptyset$ ② $A^c \subset B^c$
 ③ $A \cup B = A$ ④ $A \cap B^c = \emptyset$
 ⑤ $A \cap B = B$

해설

$[(A^c \cup B^c) \cap (A \cap B^c)^c]^c \cup B = [(A \cap B)^c \cap (A \cap B^c)^c]^c \cup B = [(A \cap B) \cup (A \cap B^c)] \cup B = [A \cap (B \cup B^c)] \cup B = A \cup B$, $A \cup B = B$ 이므로, $A \subset B$ 인 관계를 갖는다.

$\therefore A \cap B^c = A - B = \emptyset$

21. 자연수 n 에 대하여 n 의 배수의 집합을 S_n 이라 하자. $S_2 \cap (S_3 \cup S_4) = S_m \cup S_n$ 를 만족시키는 자연수 m, n 의 합 $m+n$ 의 값은? [배점 4, 중중]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 14

해설

$S_2 \cap S_3$ 은 2의 배수의 집합과 3의 배수의 집합의 교집합이므로 6의 배수의 집합이다. 즉, $S_2 \cap S_3 = S_6 \dots \textcircled{1}$

$S_2 \cap S_4$ 은 2의 배수의 집합과 4의 배수의 집합의 교집합이므로 4의 배수의 집합이다. 즉, $S_2 \cap S_4 = S_4 \dots \textcircled{2}$

따라서 $S_2 \cap (S_3 \cup S_4) = (S_2 \cap S_3) \cup (S_2 \cap S_4)$
 ($\therefore$ 분배법칙) $= S_6 \cup S_4$ ($\therefore \textcircled{1}, \textcircled{2}$) $\therefore$

$\therefore m+n = 6+4 = 10$

22. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중에서 원소의 개수가 3개이고, 반드시 4를 포함하는 부분집합은 모두 몇 개인가? [배점 4, 중중]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

구하는 부분집합은 4를 제외한 $\{1, 2, 3, 5\}$ 의 부분집합 중에서 원소가 2개인 부분집합의 개수와 같다. $\Rightarrow \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}$

23. 다음 중 p 는 q 이기 위한 충분조건인 것은?

[배점 5, 중상]

- ① $p : x = 1$ 이고 $y = 1$ $q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$
- ② $p : |x - 1| = 2$ $q : x^2 - 2x + 3 = 0$
- ③ $p : a > 3$ $q : a^2 > 9$
- ④ $p : a^2 = ab$ $q : a = b$
- ⑤ $p : |a| < |b|$ $q : a < b$

해설

$p \rightarrow q$ 이면 (진리집합 P) $\subset$ (진리집합 Q)

- ① $P : x = 1, y = 1$ $Q : x = 1, y = 1 \Rightarrow$ 필요충분조건
- ② $P : x = 3$ 또는 $x = -1$ $Q : x = 1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow$ 서로소
- ③ $P : a > 3$ $Q : a < -3$ 또는 $a > 3 \Rightarrow$ 충분조건
- ④ $P : a = 0$ 또는 $a = b$ $Q : a = b \Rightarrow$ 필요조건
- ⑤ $p \nrightarrow q, q \rightarrow p$ (반례: $a = 2, b = -3$)

24. 두 명제 「겨울이 오면 춥다.», 「추우면 눈이 온다.」가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은 ? [배점 5, 중상]

- ① 눈이 오지 않으면 춥지 않다.
- ② 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
- ③ 겨울이 어떤 눈이 온다.
- ④ 눈이 오면 겨울이 온다.
- ⑤ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

해설

p : 겨울이 온다. q : 춥다. r : 눈이 온다.

라 하면 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이다.

- ① $q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim q$ (대우 명제)
- ② $p \Rightarrow q$ 이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ (대우 명제)
- ③ $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ (삼단논법)
- ④ $p \Rightarrow r$ 이라 해서 반드시 $r \Rightarrow p$ 인 것은 아니다.
- ⑤ $p \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim p$ (대우명제)

25. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}$ 일 때, $A \cup X = B \cup X$ 를 만족시키는 S 의 부분집합 X 의 개수를 구하시오. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 개

해설

$A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ 이고 $A \cup X = B \cup X$ 이므로 2, 3은 반드시 X 의 원소에 포함되어야 한다. $A \cap B$ 의 원소인 1은 X 의 원소가 되든, 되지 않든 조건을 만족한다. 따라서 구하는 집합 X 는 S 의 부분집합 중에서 2, 3이 들어 있는지 없는 집합과 같다. $\therefore 2^4 = 16(\text{개})$

26. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중에서 홀수가 하나만 속하는 것을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 이라 하고, $A_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 의 원소의 합을 S_k 라고 할 때, $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ 의 값은? [배점 6, 상상]

- ① 216 ② 240 ③ 672
④ 696 ⑤ 728

해설

집합 S 에 홀수 1, 3, 5가 있으므로 홀수를 하나만 포함하는 부분집합의 개수를 구할 때, 1을 포함하고 3, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-3} = 8(\text{개}) \dots \textcircled{\small{A}}$$

3을 포함하고 1, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-3} = 8(\text{개}) \dots \textcircled{\small{B}}$$

5를 포함하고 1, 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-3} = 8(\text{개}) \dots \textcircled{\small{C}}$$

이므로 모두 24개이다. 이 24개의 부분집합의 열을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{24}$ 라 하면 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{24}$ 에는 S 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각각 몇 개씩 들어갈까? 우선 1을 포함하고 3, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수가 8개이므로 1이 8번 들어가는 것은 분명하다. 그러면 3, 5는 들어가지 않으니 문제 삼지 말고 2, 4, 6은 몇 번 들어갈까?

구체적으로 나열하면 $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 2, 4, 6\}$ 이 되어 2, 4, 6은 각각 4번씩 들어간다. 따라서 $\textcircled{\small{A}}$ 의 8개의 집합 안에는 1이 8번, 2, 4, 6이 각각 4번씩 $\textcircled{\small{B}}$ 의 8개의 집합 안에는 3이 8번, 2, 4, 6이 각각 4번씩 $\textcircled{\small{C}}$ 의 8개의 집합 안에는 5가 8번, 2, 4, 6이 각각 4번씩 들어가므로 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{24} = 8(1+3+5) + 12(2+4+6) = 216$ 그런데, 여기서 원소의 총합에 대한 규칙성을 발견해 보면 2, 4, 6이 각각 4번씩 나오는데 그 이유를 알아보자. 1을 반드시 포함하고 3, 5를 포함하지 않는 부분집합 중에서 2를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 1, 2, 3, 5를 제외한 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{6-4} = 4(\text{개})$ 이다.