

단원 종합 평가

1. 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 중 a, c 를 반드시 포함하고, e 를 포함하지 않는 것의 개수를 구하시오. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 4

해설

이것은 집합 $\{b, d\}$ 의 부분집합 $\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}$ 에 원소 a, c 를 포함시킨 $\{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}$ 이므로, 구하는 부분집합의 개수는 4개다.

$$2^5 - 2 - 1 = 2^2 = 4$$

2. 명제「 $p \rightarrow \sim q$ 」가 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는? [배점 3, 하상]

- ① $p \rightarrow q$ ② $q \rightarrow p$
 ③ $\sim p \rightarrow q$ ④ $q \rightarrow \sim p$
 ⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

주어진 명제가 참이므로 대우「 $q \rightarrow \sim p$ 」도 참이다.

3. 다음 중 명제의 대우가 참인 것은? [배점 3, 하상]

- ① x 가 유리수이면 x^2 은 유리수이다.
 ② 두 직사각형의 넓이가 같으면 두 직사각형은 합동이다.
 ③ $x^2 = y^2$ 이면 $x = y$ 이다.
 ④ 닮음인 두 삼각형은 합동이다.
 ⑤ x 또는 y 가 무리수이면 $x + y$ 가 무리수이다.

해설

명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

4. 두 집합 $A = \{1, 2, a^2 - 1\}$, $B = \{3, a, a - 1\}$ 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cap B)^c = B$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은? [배점 3, 중하]

- ① $a = 1$ ② $a = -1$ ③ $a = 3$
 ④ $a = -2$ ⑤ $a = 2$

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cap B)^c = (A \cup B) \cap (A \cup B) = A \cup (B \cap B) = A \cup \phi = A$
 $\therefore A = B \Rightarrow a^2 - 1 = 3, a = \pm 2$ 여기서 $a = -2$ 이면 $B = \{3, -2, -3\}$ 이 되어 성립하지 않는다.
 $\therefore a = 2$

5. 다음 조건 p 는 조건 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라. (단, a, b 는 실수) (i) $p : a, b$ 는 유리수 $q : a + b, ab$ 는 유리수 (ii) $p : x$ 는 3의 배수 $q : x$ 는 6의 배수
[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 필요

6. 두 실수 a, b 에 대하여 두 등식 $a + b = |a + b|, |a + b| = |a| + |b|$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?
[배점 3, 중하]

- ① $a + b \geq 0$ ② $a \geq 0$ 이고 $b \geq 0$
③ $a \geq 0$ 또는 $b \geq 0$ ④ $ab \geq 0$
⑤ $ab \leq 0$

해설

$$a + b = |a + b|, |a + b| = |a| + |b| \Rightarrow a + b = |a| + |b|$$

$$\therefore a \geq 0 \text{ 이고 } b \geq 0$$

7. 다음 <보기> 의 () 안에 알맞은 것을 차례로 적어시오. (가) 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \cup C = B \cup C$ 인 것은 $A = B$ 이기 위 한 () 조건이다. (나) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ 은 $x = y = 0$ 이기 위한 () 조건이다.
[배점 3, 중하]

- ① 충분, 충분
② 필요, 충분
③ 필요, 필요
④ 필요충분, 필요
⑤ 필요충분, 필요충분

해설

$$(가) A \cup C = B \cup C$$

$\frac{x}{0}$

$A = B$ 반례) $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{1, 2\}$ 인 경우 $\therefore$ 필요조건

(나) $x^2 - 2xy + y^2 = 0, (x - y)^2 = 0$ 이므로 $x = y$ $\frac{x}{0}$ $x = y = 0 \therefore$ 필요조건

8. 두 집합 $A = \{1, 4, a^2 + 2a\}, B = \{a + 2, a^2, 2a - 3\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{1, 3\}$ 일 때, $B - A$ 를 구하면?
[배점 4, 중중]

- ① $\{-1\}$ ② $\{2\}$
③ $\{-1, 2\}$ ④ $\{9\}$
⑤ $\{-2, 2, 9\}$

해설

$A \cap B = \{1, 3\}$ 이므로 $a^2 + 2a = 3$, $a^2 + 2a - 3 = 0$, $a = -3$ or 1

(i) $a = -3$ 일 때 $B = \{-9, -1, 9\}$ 로 성립하지 않는다.

(ii) $a = 1$ 일 때 $B = \{-1, 1, 3\}$

$\therefore B - A = \{-1\}$

9. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (B - A)^C = A \cup B$ 일 때, $A - B^C$ 을 간단히 표시하면?

[배점 4, 중중]

- ① A ② B ③ $A \cup B$
④ $A - B$ ⑤ A^C

해설

준식 : $A \cup B = (A \cup B) \cap (B - A)^C$

$= (A \cup B) - (B - A) = A$

$A = A \cup B \rightarrow B \subset A$

$\therefore A - B^C = A \cap B = B$

10. 두 집합 A, B 에 대하여 $\{(A - B) \cup (A \cap B)\} \cap B = A$ 가 성립할 때, 집합 A, B 사이의 관계로 옳지 않은 것은?

[배점 4, 중중]

- ① $A \cap B = A$ ② $A \cup B = B$
③ $A - B = \emptyset$ ④ $A^C \subset B^C$
⑤ $A \cap B^C = \emptyset$

해설

$(A - B) \cup (A \cap B) = A$

$A \cap B = A \therefore A \subset B$

$\Rightarrow A \cup B = B$

$\Rightarrow B^C \subset A^C$

$\Rightarrow A - B = A \cap B^C = \emptyset$

11. x, y, z 가 실수일 때, 조건 $(x - y)^2 + (y - z)^2 = 0$ 의 부정과 동치인 것은? [배점 4, 중중]

① $(x - y)(y - z)(z - x) \neq 0$

② x, y, z 는 서로 다르다.

③ $x \neq y$ 이고 $y \neq z$

④ $(x - y)(y - z)(z - x) > 0$

⑤ x, y, z 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

해설

$(x - y)^2 + (y - z)^2 = 0$ 이면 $x = y = z$ 이므로 이것의 부정은 $x \neq y$ 또는 $y \neq z$ 또는 $z \neq x$ 즉, x, y, z 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

12. 조건 $p : x - 2 \neq 0$ 가 $q : x^2 - ax + 4 \neq 0$ 이기 위한 필요조건일 때, a 의 값은? [배점 4, 중중]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$ 또, 어떤 명제가 참이면 그 대우도 참이므로 $p \Rightarrow q$
즉, " $x - 2 = 0$ 이면 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이다"가 참이다.
 $\therefore 4 - 2a + 4 = 0 \therefore a = 4$

13. 다음 중에서 p 가 q 이기 위한 필요조건인 것을 고르면?
[배점 4, 중중]

- ① $p : a = b \quad q : ac = bc$
② $p : a > b \quad q : a^2 > b^2$
③ $p : A \subset (B \cap C) \quad q : A \subset (B \cup C)$
④ $p : x + y = 1 \quad q : x = 2, y = -1$
⑤ $p : |x - 1| < 1 \quad q : |x| < 1$

해설

$q \rightarrow p$ 가 참. 즉, 주어진 명제의 역이 참인 것을 찾는다.
① 충분조건 반례 : $c = 0, a = 1, b = 2$
② 충분조건 반례 : $a = -2, b = -1$
③ 함집합에 포함된다 하여 교집합에 포함된다 고 할 수 없다. $(B \cap C) \subset (B \cup C)$ 이므로 $p \rightarrow q$ (충분조건)
④ 역 : $x = 2, y = -1$ 이면 $x + y = 1$ 이다.(참)
⑤ $|x - 1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2, |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ 이므로 $q \not\Rightarrow p$

14. 임의의 집합 X 에 대하여 집합 A, B 가 $A \cap (B \cup X) = A \cup (B \cap X)$ 를 만족할 때, 다음 중 집합 A, B 의 관계로 옳은 것은?
[배점 5, 중상]

- ① $A = B$ ② $A \subset B^c$
③ $A \cup B = U$ ④ $A = \emptyset$
⑤ $A \cap B = \emptyset$

해설

집합 X 가 임의의 집합이므로 $X = \emptyset$ 일 때와 $X = U$ (U 는 전체집합)일 때를 생각해 본다.
i) $X = \emptyset$ 일 때, $A \cap (B \cup \emptyset) = A \cap B, A \cup (B \cap \emptyset) = A \cup \emptyset = A$ 이므로 $A \cap B = A \therefore A \subset B$
ii) $X = U$ 일 때, $A \cap (B \cup U) = A \cap U = A, A \cup (B \cap U) = A \cup B$ 이므로 $A = A \cup B \therefore B \subset A$
i), ii)에서 $A = B$
또, 역으로 $A = B$ 이면 주어진 식을 만족한다.

15. 지성이는 자기 반 학생 35명의 키와 몸무게를 조사하여 "키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 65kg 이상이다"라는 결론을 내렸다. 다음 <보기> 중 지성의 결론이 참인지 알아보기 위해 반드시 확인해야 할 것을 모두 고르면?

- ㉠ 키가 180cm인 학생의 몸무게
㉡ 키가 170cm인 학생의 몸무게
㉢ 몸무게가 70kg인 학생의 키
㉣ 몸무게가 60kg인 학생의 키

[배점 5, 중상]

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉣

해설

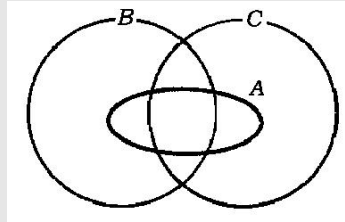
지성이의 결론 “키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 65kg 이상이다”가 참이면 키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 반드시 65kg 이상이어야 하므로 키가 180cm인 학생의 몸무게가 65kg 이상인지 반드시 확인해야 한다. 또한, 지성이의 결론이 참이면 결론의 대우 “몸무게가 65kg 미만인 학생의 키는 175cm 미만이다”도 참이므로, 몸무게가 60kg인 학생의 키가 175cm 미만인지 확인해야 한다.
 $\therefore$ ㉠, ㉡

16. x, y 가 실수이고 A, B, C 를 집합이라 할 때 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요충분조건은? [배점 5, 중상]

- ① $p: x + y \geq 2, q: x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$
- ② $p: |x| + |y| = 0, q: 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$
- ③ $p: xy + 1 > x + y > 2, q: x > 1$ 이고 $y > 1$
- ④ $p: A \subset B \subset C, q: A \subset B$ 또는 $A \subset C$
- ⑤ $p: x + y$ 가 유리수이다. $q: x, y$ 모두 유리수이다.

해설

- ① $x + y \geq 2 \nRightarrow x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (충분조건) (반례 : $x = 3, y = -3$)
- ② $|x| + |y| = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 0$, 여기서 $|x| + |y| = 0$ 은 $x = 0, y = 0$ 과 같으므로 $x = 0, y = 0 \rightarrow \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 0$ (충분조건) (반례 : $x = 8, y = -8$)
- ③ $xy + 1 > x + y > 2 \Leftrightarrow x > 1$ 이고 $y > 1$
- ④ $A \subset B \cup C \leftarrow A \subset B$ 또는 $A \subset C$ (충분조건)



- ⑤ $x + y$ 가 유리수이다. $\leftarrow x, y$ 모두 유리수이다. (필요조건) (반례 : $x = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}$)

17. 다음은 명제 ' $3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 (가)'에 대한 증명에서 중간 부분을 적은 것이다.

...(생략)...

m, n 이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$ 은 3의 배수이다. 한편, 정수 n 이 어떤 정수 k 에 대하여, $n = 3k$ 이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$, $n = 3k + 1$ 이면 $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, $n = 3k + 2$ 이면 $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ 이므로 n^2 을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다. 따라서 $n^2 + 1$ 을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다.

...(생략) ...

다음 중 위의 (가)에 가장 알맞은 것은?

[배점 5, 중상]

- ① m, n 중 적어도 하나는 정수이다.
- ② m, n 중 어느 것도 정수가 아니다.
- ③ m, n 이 모두 정수인 해가 적어도 하나 있다.
- ④ m, n 이 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.
- ⑤ m, n 이 모두 정수인 해는 없다.

해설

귀류법을 쓰면 m, n 이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$ 은 3의 배수이다. ... ㉠

한편, 정수 n 이 어떤 정수 k 에 대하여, $n = 3k$ 이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$, $n = 3k + 1$ 이면 $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, $n = 3k + 2$ 이면 $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ 이므로, n^2 을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다. 따라서, $n^2 + 1$ 을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다. ... ㉡

그러므로 ㉠, ㉡에 의하여 모순이다. 따라서, $3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 m, n 이 모두 정수인 해는 없다.

18. 집합 $2^M = P(M) = \{X | X \subset M\}$ 이라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $n(M) = k$ 이면 $n(P(M)) = 2^k$

㉡ $A = \{a, b\}$ 이면 $P(A)$ 의 부분집합의 수는 16 개이다.

㉢ $P(\phi) = \{\phi\}$

㉣ $P(P(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$

㉤ $P(\{1\})$ 의 부분집합은 $\phi, \{\phi\}, \{\{1\}\}, \{\phi, \{1\}\}$

[배점 5, 상하]

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
- ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠ $P(M)$ 은 M 의 부분집합들을 원소로 하는 집합이므로 옳다.

㉡ $n(P(A)) = 4$ 이므로 $P(A)$ 의 부분집합의 수는 $2^4 = 16$ (개)이다.

㉢ $P(\phi) = \{X | X \subset \phi\} = \{\phi\}$

㉣ $P(\phi)$ 의 부분집합은 $\phi, \{\phi\}$ 이므로 $P(P(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$

㉤ $P(\{1\}) = \{X | X \subset \{1\}\} = \{\phi, \{1\}\}$ 이므로 $P(\{1\})$ 의 부분집합은 $\phi, \{\phi\}, \{\{1\}\}, \{\phi, \{1\}\}$

19. 실수 전체의 두 부분 집합 A, B 가 두 조건

- $1 \in A$
- $x \in A$ 이면 $x+1 \in A$ 이고 $x-1 \in B$

를 만족할 때, 다음 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ A 는 모든 자연수를 원소로 갖는다.
- ㉡ A 의 원소는 모두 B 의 원소이다.
- ㉢ B 는 최대 원소를 갖는다.
- ㉣ B 는 정수 전체 집합의 부분집합이다.

[배점 5, 상하]

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉠, ㉡, ㉣
- ③ ㉠, ㉡, ㉢
- ④ ㉠, ㉢, ㉣
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $x \in A$ 이면 $x+1 \in A$ 이고 $1 \in A$ 이므로 $1+1=2 \in A, 2+1=3 \in A, \dots$
 $\therefore A \supset \{1, 2, 3, \dots\}$ (참)
 ㉡ $x \in A \rightarrow x+1 \in A \rightarrow (x+1)-1 \in B$
 $\therefore x \in A \rightarrow x \in B$ (참)
 ㉢ $B \supset \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 따라서 B 는 무한 집합이므로 최대 원소는 없다.
 ㉣ $\frac{1}{2} \in A$ 이면 B 에는 정수가 아닌 원소가 들어 있게 되므로 거짓이다. (조건에서 $1 \in A$ 라고 해서 1 이외의 수가 A 의 원소가 될 수 없다는 의미는 아니다.)

20. 두 명제 「겨울이 오면 춥다.」와 「눈이 오지 않으면 춥지 않다.」가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은?

[배점 5, 상하]

- ① 추우면 눈이 온다.
- ② 눈이 오면 겨울이 온다.
- ③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.
- ④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
- ⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

p : 겨울이 온다. q : 춥다. r : 눈이 온다. 주어진 명제는 $p \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow \sim q$ 이므로 각각 그 대우인 $\sim q \Rightarrow \sim p, q \Rightarrow r$ 도 성립하고 $p \Rightarrow q \Rightarrow r$ 이 되어 $p \Rightarrow r$ 과 그 대우 $\sim r \Rightarrow \sim p$ 도 성립한다.
 ① 추우면 눈이 온다. ($q \Rightarrow r$) 옳다.
 ② 눈이 오면 겨울이 온다. ($r \Rightarrow p$) 옳지 않다.
 ③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다. ($\sim r \Rightarrow \sim p$) 옳다.
 ④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다. ($\sim q \Rightarrow \sim p$) 옳다.
 ⑤ 겨울이 오면 눈이 온다. ($p \Rightarrow r$) 옳다.