단원 종합 평가

1. 두 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,4,8\}$에 대하여 $(A-B)\cap X=X$를 만족시키는 집합X 는 모두 몇 개인가? [배점 3, 중하]

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

$A-B=\{1,3,5\}$이고, $(A-B)\cap X=X$로부터$X\subset(A-B)$ 이다.따라서, $X\subset(A-B)$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는 $\{1,3,5\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

2. 세 조건 p, q, r 에 대하여 r 이 $\sim q$ 이기 위한 충분조건, q 가 p 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 반드시 참 이라고 할 수 없는 것은? [배점 3, 중하]

① $p\to q$ ② $r\to\sim q$

③ $p\to\sim r$ ④ $q\to\sim r$

⑤ $\sim p\to r$

해설

$r\to\sim q(T)\Rightarrow q\to\sim r(T)\cdots$ ㉠

$p\to q(T)\Rightarrow\sim q\to\sim p(T)\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서$r\to\sim q\to\sim p\Rightarrow r\to\sim p(T)$

$\Rightarrow p\to\sim r(T)$

3. 다음 중 명제 「$x+y\geq 2$ 이고 $xy\geq 1$ 이면, $x\geq 1$ 이고 $y\geq 1$ 이다.」가 거짓임을 보이는 반례는? [배점 3, 중하]

① $x=1,\ y=\frac{1}{2}$ ② $x=100,\ y=\frac{1}{2}$

③ $x=1,\ y=1$ ④ $x=2,\ y=4$

⑤ $x=-1,\ y=-5$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것을 고르면 된다.

따라서 ②가 올바른 반례이다

4. 실수 전체집합에 대하여 세 조건 p,q,r 이 아래와 같을 때 다음 중 참인 명제는?

$p:x>1,\ q:1<x<2,\ r:x<2$

[배점 3, 중하]

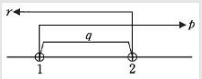
① $p\to q$ ② $p\to r$

③ $q\to r$ ④ $r\to p$

⑤ $\sim r\to\sim p$

해설

$p:\ x>1,\ \ q:\ 1<x<2,\ \ r:\ x<2$



$\therefore\ Q\subset P,\ Q\subset R$ 이므로, $q\to p,\ \ q\to r$ (참)

5. 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 의 부분집합 중에서 원소의 개수가 3개이고, 반드시 4를 포함하는 부분집합은 모두 몇 개인가? [배점 4, 중중]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

구하는 부분집합은 4를 제외한 $\{1,2,3,5\}$ 의 부분집합 중에서 원소가 2개인 부분집합의 개수와 같다. $\Rightarrow \{1,2\},\{1,3\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,5\}$

해설

① 결합법칙이 성립하므로 참

② 벤다이어그램으로 확인하면 참

③ 벤다이어그램을 그려보면 참임을 쉽게 알 수 있다. 연산을 해보면 다음과 같다.

$(A\cap B)\cup(A-B) = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)$ $(\because A-B=A\cap B^c) = A\cap(B\cup B^c)$ $[\because$ 분배법칙$]$ $= A\cap U$ $(\because B\cup B^c = U\ ) = A$ $\therefore$ 참

④ $A\cap(A^c\cup B) = (A\cap A^c)\cup(A\cap B)$ $[\because$ 분배법칙$]$ $= \varnothing\cup(A\cap B)$ $(\because A\cap A^c=\varnothing) = A\cap B$ $\therefore$ 참

⑤ 벤다이어그램으로 확인하는 것이 간편하다.

$U-(A\cup B)^c = U\cap\{(A\cup B)^c\}^c(\because A-B = A\cap B^c) = U\cap(A\cup B)$ $(\because (A^c)^c=A) = A\cup B$

$\therefore$ 거짓

6. 집합 A, B, C 가 전체집합 U 의 부분집합일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면? [배점 4, 중중]

① $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

② $A\subset B$ 이면 $A\cup B=B$, $A\cap B=A$ 이다.

③ $(A\cap B)\cup(A-B)=A$

④ $A\cap(\ A^C\cup B\ )=A\cap B$

⑤ $U-(A\cup B)^C=A\cap B$

7. 다음 중 명제와 그 역이 <u>모두</u> 참인 것은? [배점 4, 중중]

① $x+y=xy$ 이면 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ 이다.

② $a\neq 0$ 일 때, $ax>b$ 이면 $x>\frac{b}{a}$ 이다.

③ $a>b>0$, $c>d>0$ 이면 $ac>bd$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$ 이다.

④ 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같은 사각형은 평행사변형이다.

⑤ 정삼각형에서 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

해설

① $xy=0$ 이면 성립하지 않으므로 명제가 거짓이다.
② $a \le 0$ 이면 성립하지 않으므로 명제가 거짓이다.
③ $4>3>0,\ 5>3>0$ 이면 $\frac{4}{5}<\frac{3}{3}$ 이므로 명제가 거짓이다.
⑤ 꼭지각의 이등분선이 밑변을 수직이등분하면 이등변삼각형이므로 명제는 참이지만 역은 거짓이다.

8. 다음 중 p는 q이기 위한 충분조건이지만, 필요조건은 아닌 것은? [배점 4, 중중]

① $p : xz=yz\ q : x=y$

② p : 3 의 배수 q : 9 의 배수

③ $p : x=1, y=1\ q : x+y=2, xy=1$

④ $p : |x-1|=2\ q : x^2-2x-3=0$

⑤ $p : a+b>2\ q : a>1$ 또는 $b>1$

해설

① 필요조건
② 필요조건
③ 필요충분조건
④ 필요충분조건
⑤ [반례] $a=2, b=-10$ 일 때, $q \to p$가 성립하지 않는다.

9. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 3개인 모든 부분집합의 원소의 총합을 구하시오. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 90

해설

1을 제외하고 나머지 원소들 중 2개 만을 뽑아 집합을 만들면{ 2, 3 }, { 2, 4 }, { 2, 5 }, { 3, 4 }, { 3, 5 }, { 4, 5 }로 모두 6개 이다. 다른 원소의 경우도 마찬가지이므로 구하는 원소의 총합은 다음과 같다.
$\therefore 6(1+2+3+4+5)=90$

10. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 $A^c \cap B = \varnothing$를 만족할 때, 다음 중에서 항상 성립하는 것의 개수는?

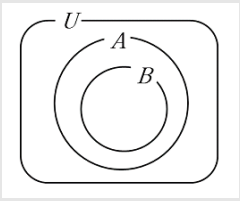
㉠ $A=B$	㉡ $A \cup B = B$
㉢ $A^c \subset B^c$	㉣ $A \cap B = B$
㉤ $A \cup B^c = U$	㉥ $A - B = \varnothing$

[배점 5, 중상]

① 1 (개) ② 2 (개) ③ 3 (개)
④ 4 (개) ⑤ 5 (개)

해설

$A^c \cap B = B - A = \varnothing$ 이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ B \subset A$

㉠ $A = B$ 는 $B \subset A$ 이므로 성립한다.

㉡ $B \subset A \quad \leftrightarrow \quad A^c \subset B^c$

㉢ $B \subset A \quad \leftrightarrow \quad A \cap B = B$ 이므로 성립한다.

㉣ 위의 그림에서 $A \cup B^c = U$ 이다. $\therefore$ 4 개

11. 집합 A의 멱집합 2^A을 $2^A = \{X | X \subset A\}$로 정의한다. $A = \{1,\ 2\},\ B = 2^A$ 일 때, $n(2^B)$의 값은? [배점 5, 중상]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$n(A) = 2$ 이므로 $n(2^A) = 2^2 = 4$ 개

$\therefore\ n(B) = 4,\ n(2^B) = 2^4$(개)

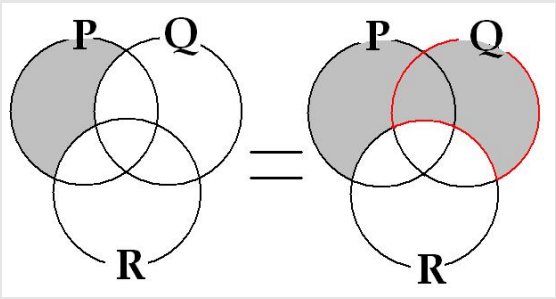
12. 조건 $p,\ q,\ r$을 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q,\ R$이라고 하자. $P - (Q \cup R) = (P \cup Q) - R$ 가 성립할 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은? [배점 5, 중상]

① $p \to q$ ② $r \to q$ ③ $q \to p$

④ $p \to r$ ⑤ $q \to r$

해설

$P - (Q \cup R) = (P \cup Q) - R$ 벤다이어그램으로 나타내면



$Q \cup R = R \leftrightarrow$

$Q \subset R \therefore\ q \to r$ 가 참이다.

13. 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, $a,\ b,\ c$ 는 실수이다.)

㉠ $p\ :\ |a| + |b| = 0\ \ q\ :\ ab = 0$

㉡ $p\ :\ (a-b)(b-c) = 0$
$q\ :\ (a-b)^2 + (b-c)^2 = 0$

㉢ $p : 0 < x < y\ \ q : x^2 < y^2$

㉣ $p : x < y\ \ q : [x] < [y]$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

[배점 5, 중상]

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ p : $|a|+|b|=0 \Leftrightarrow a=0$이고 $b=0$ q : $ab=0$ $\Leftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$ $\therefore p \Rightarrow q$ 이고 $p \not\Leftarrow q$ 이므로 만족

㉡ p : $(a-b)(b-c)=0$ $a=b$ 또는 $b=c$ q : $a=b$ 그리고 $b=c$ $\therefore p \not\Rightarrow q$이고 $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족 한다.

㉢ $p \Rightarrow q$ ($\because x, y$ 모두 양수) $p \not\Leftarrow q$ ($\because x, y$ 모두 음수이거나 서로 부호가 다를 때 참이 아닐 수 있다.) $\therefore$ 만족

㉣ $p \not\Rightarrow q$ ($\because x=1, y=1.5$ 일 때 [1]=[1.5]=1일 수 있다.) $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족

14. 다음 중 p는 q이기 위한 충분조건인 것은?

[배점 5, 중상]

① $p : x=1$ 이고 $y=1$ $q : x+y=2$ 이고 $xy=1$

② $p : |x-1|=2$ $q : x^2-2x+3=0$

③ $p : a>3$ $q : a^2>9$

④ $p : a^2=ab$ $q : a=b$

⑤ $p : |a|<|b|$ $q : a<b$

해설

$p \rightarrow q$ 이면 (진리집합 P)$\subset$ (진리집합 Q)

① $P : x=1,\ y=1$ $Q : x=1\ \ y=1 \Rightarrow$ 필요충분조건

② $P : x=3$ 또는 $x=-1$ $Q : x=1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow$ 서로소

③ $P : a>3$ $Q : a<-3$ 또는 $a>3 \Rightarrow$ 충분조건

④ $P : a=0$ 또는 $a=b$ $Q : a=b \Rightarrow$ 필요조건

⑤ $p \not\rightarrow q$, $q \rightarrow p$ (반례 : $a=2, b=-3$)

15. 실수 전체의 두 부분 집합 A, B 가 두 조건

· $1 \in A$
· $x \in A$ 이면 $x+1 \in A$ 이고 $x-1 \in B$

를 만족할 때, 다음 <보기> 에서 항상 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ A 는 모든 자연수를 원소로 갖는다.

㉡ A 의 원소는 모두 B 의 원소이다.

㉢ B 는 최대 원소를 갖는다.

㉣ B 는 정수 전체 집합의 부분집합이다.

[배점 5, 상하]

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉡, ㉣ ④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $x \in A$ 이면 $x+1 \in A$ 이고 $1 \in A$ 이므로 $1+1=2 \in A,\ 2+1=3 \in A,\ \cdots$

$\therefore A \supset \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ (참)

㉡ $x \in A \rightarrow x+1 \in A \rightarrow (x+1)-1 \in B$

$\therefore\ x \in A \rightarrow x \in B$ (참)

㉢ $B \supset \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ 따라서 B는 무한 집합이므로 최대 원소는 없다.

㉣ $\frac{1}{2} \in A$이면 B에는 정수가 아닌 원소가 들어있게 되므로 거짓이다.(조건에서 $1 \in A$라고 해서 1이외의 수가 A의 원소가 될 수 없다는 의미는 아니다.)

16. 임의의 집합 S에 대하여 $P(S)$를 $P(S)=\{X|X\subset S\}$로 정의할 때, $P(P(\varnothing))$와 같은 것은? [배점 5, 상하]

① $\varnothing$ ② $\{\varnothing\}$

③ $\{\{\varnothing\}\}$ ④ $\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$

⑤ $\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\{\varnothing\}\}\}$

해설

$P(\varnothing)=\{X|X\subset\varnothing\}$에서 $\varnothing$의 부분집합은 $\varnothing$ 뿐이므로 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$ 이다. 또한, 집합 $\{\varnothing\}$의 부분집합은 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$이므로$P(P(\varnothing))=\{X|X\subset P(\varnothing)\}=\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$

17. 다음 보기 중 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것의 개수는?

㉠ $p: xy+1>x+y>2\ q: x>1,\ y>1$
㉡ $p: x^2>y^2\ q: |x|>|y|$
㉢ $p: |x|+|y|=0\ q: x^2+y^2=0$
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
㉣ $p: (A\cup B)\cap(B-A)^C=A\cup B,\ q: B\subset A$
㉤ $p: (A\cup B)-(A\cap B)=B,\ q: A-B=\phi$
㉥ $p: (A\cup B)-(A\cap B)=B,\ q: A^C=$U

[배점 5, 상하]

해설

㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉥이 필요충분조건이다.
㉠ : $xy+1>x+y>2 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)>0 \Leftrightarrow x>1, y>1$ 또는 $x<1, y<1$
그런데 $x+y>2$ 이므로 $x>1, y>1 \therefore p \Rightarrow q$ 이고 역도 성립한다.
㉤ $(A\cup B)-(A\cap B)=B \Leftrightarrow A=\phi$

18. x, y가 실수일 때, 다음 조건 중에서 조건 A가 조건 B이기 위한 필요충분조건인 것은? [배점 5, 상하]

① A : $x+y>2$ B : $x>1$이고 $y>1$

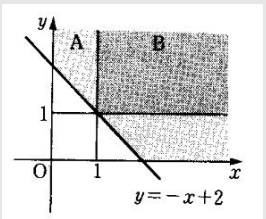
② A : $|x|+|y|=0$ B : $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=0$

③ A : $x+y>0$ 이고 $xy>0$ B : $x>0$ 이고 $y>0$

④ A : $xy>x+y>4$ B : $x>2$ 이고 $y>2$

⑤ A : $x+y>2$ B : $x>2$ 또는 $y>1$

해설



① 그림에서 $A \overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}} B$ 이다. 즉, $B\subset A$ 이므로 A는 B 이기 위한 필요조건
② $|x|+|y|=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=0 \Leftrightarrow x=0,\ y=0, 3\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}=0$ 을 만족시키는 x, y는 $x=0,\ y=0$ 이외에도 $x=8,\ y=-8,\ \cdots$ 등이 있다. $\therefore A \overset{\circ}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} B$ (충분조건)
③ A는 x 축, y 축을 제외한 제1 사분면을 나타내므로 B 와 동치이다.
④ $A \overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}} B$ 이다.(필요조건) (반례) $x=4,\ y=\frac{3}{2}$ 이다. $xy>x+y>4$ 이지만, $x>2,\ y<2$ 이다.
⑤ (충분조건) (반례)$x=3,\ y=-4$ 는B 를 만족시키지만 A 를 만족시키지 않는다. $\therefore A \overset{\circ}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} B$

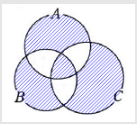
19. 임의의 두 집합 X, Y에 대하여, 연산 $\triangle$을 $X \triangle Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$로 정의한다.1에서 30까지의 정수 중 2의 배수, 3의 배수, 5의 배수의 집합을 차례로 A, B, C라 할 때, $(A \triangle B) \triangle C$의 원소의 개수를 구하면? [배점 6, 상중]

① 10 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

해설

$X \triangle Y = (X \cup Y) - (X \cap Y) = (X - Y) \cup (Y - X)$

$(A \triangle B) \triangle C$ 의 벤다이어그램은 다음과 같다.



$\therefore \quad n((A \triangle B) \triangle C) = n(A) + n(B) + n(C) - 2\{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} + 4n(A \cap B \cap C)$

$= (15 + 10 + 6) - 2(5 + 2 + 3) + 4 = 15$(개)

20. 갑은 x 일간의 여름 휴가 중 날씨를 관찰하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

㉠ 비가 오지 않은 오전은 6 번 있었다.

㉡ 비가 오지 않은 오후는 5 번 있었다.

㉢ 오후에 비가 온 날은 오전에는 비가 오지 않았다.

㉣ 오전 또는 오후에 비가 온 경우는 7번 있었다.

위의 사실로부터 알 수 있는 갑의 휴가 기간 x 의값은? [배점 6, 상중]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

비가 온 오전: a 비가 오지않은 오전: b 비가 온 오후: c 비가 오지않은 오후: d

주어진 조건으로부터 $a+b+c+d=x$, $b+d=6$, $c+d=5$, $a+b+c=7$

㉢에서 오후에 비가 온 날은 오전에는 비가 오지 않았으므로 $a=0$ 이다. $b+d=6$, $b+c=7$ 에서 $c-d=1$ 또한, $c+d=5$ 이므로 $c=3$, $d=2$, $b=4$

$\therefore \ x=0+4+3+2=9$(일)