

단원 종합 평가

1. $A = \{0, 1\}$, $B = \{xy | x \in A, y \in A\}$, $C = \{x + y | x \in A, y \in A\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?
[배점 3, 중하]

- ① $A = B \subset C$ ② $A \subset C \subset B$
③ $B \subset C \subset A$ ④ $C = A \subset B$
⑤ $C \subset B \subset A$

해설

$$B = \{0, 1\}, C = \{0, 1, 2\}$$

2. 두 집합 A, B 에 대하여 두 조건 p, q 는 $p: (A \cup B) - (A \cap B) = \phi$ $q: [\quad]$ 이고, p 가 q 이기 위한 필요충분조건일 때, $[\quad]$ 의 내용으로 알맞은 것은?
[배점 3, 중하]

- ① $A = \phi$ ② $A = B$ ③ $A \subset B$
④ $B \subset A$ ⑤ $B = \phi$

해설

$(A \cup B) - (A \cap B) = \phi$ 이 성립하려면, $(A \cup B) \subset (A \cap B)$ 즉, $A = B$ 일 때이다.

3. 다음 중 명제 「 $x + y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.」가 거짓임을 보이는 반례는?
[배점 3, 중하]

- ① $x = 1, y = \frac{1}{2}$ ② $x = 100, y = \frac{1}{2}$
③ $x = 1, y = 1$ ④ $x = 2, y = 4$
⑤ $x = -1, y = -5$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것을 고르면 된다.
따라서 ②가 올바른 반례이다

4. 자연수 n 에 대하여 n 의 배수의 집합을 S_n 이라 하자. $S_2 \cap (S_3 \cup S_4) = S_m \cup S_n$ 를 만족시키는 자연수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값은?
[배점 4, 중중]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 14

해설

$S_2 \cap S_3$ 은 2의 배수의 집합과 3의 배수의 집합의 교집합이므로 6의 배수의 집합이다. 즉, $S_2 \cap S_3 = S_6$... ㉠

$S_2 \cap S_4$ 은 2의 배수의 집합과 4의 배수의 집합의 교집합이므로 4의 배수의 집합이다. 즉, $S_2 \cap S_4 = S_4$... ㉡

따라서 $S_2 \cap (S_3 \cup S_4) = (S_2 \cap S_3) \cup (S_2 \cap S_4)$
($\because$ 분배법칙) $= S_6 \cup S_4$ ($\because$ ㉠, ㉡) $\therefore$
 $\therefore m + n = 6 + 4 = 10$

5. 임의의 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것은?

[배점 4, 중중]

- ① $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
 ② $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$
 ③ $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$
 ④ $A - (B - C) = (A - B) \cup (A - C)$
 ⑤ $(A^c - B)^c = A \cup B$

해설

- ① $(A - B) - C = (A \cap B^c) \cap C^c$
 $= A \cap (B^c \cap C^c)$
 $= A \cap (B \cup C)^c$
 $= A - (B \cup C) \quad \therefore (\text{참})$
 ② $(A - B) \cap (A - C) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c)$
 $= A \cap (B^c \cap C^c)$
 $= A \cap (B \cup C)^c$
 $= A - (B \cup C) \quad \therefore (\text{참})$
 ③ $(A - B) \cup (A - C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$
 $= A \cap (B^c \cup C^c)$
 $= A \cap (B \cap C)^c$
 $= A - (B \cap C) \quad \therefore (\text{참})$
 ④ $A - (B - C) = A \cap (B \cap C^c)^c$
 $= A \cap (B^c \cup C)$
 $= (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$
 $= (A - B) \cup (A \cap C) \quad \therefore (\text{거짓})$
 ⑤ $(A^c - B)^c = (A^c \cap B^c)^c$
 $= A \cup B \quad \therefore (\text{참})$

6. 자연수 N 의 배수의 집합을 A_N 이라 할 때,
 $(A_4 \cap A_6) \supset A_a$ 을 만족하는 a 의 최솟값을 m ,
 $(A_4 \cup A_6) \subset A_b$ 을 만족하는 b 의 최댓값을 M 이라
 할 때, $M - m$ 의 값은? [배점 4, 중중]

- ① -10 ② 28 ③ 14 ④ 10 ⑤ -14

해설

$(A_4 \cap A_6) \supset A_a \rightarrow m = 12 (\because 4, 6 \text{의 } L.C.M)$
 $(A_4 \cup A_6) \subset A_b \rightarrow M = 24 (\because 4, 6 \text{의 } G.C.D)$
 $\therefore M - m = -10$

7. 집합 $U = \{0, 1, \{0, 1\}\}$ 의 부분집합 $A = \phi$, $B = \{0\}$,
 $C = \{1\}$, $D = \{\{0, 1\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을
 모두 고르면?

- ㉠ $\{B \cup C\} \cap \{C\} = A$
 ㉡ $\{B \cap C\} = A$
 ㉢ $U - \{B \cup C\} = B \cup C$
 ㉣ $A \cup B \cup C = D$

[배점 4, 중중]

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢
 ③ ㉠, ㉢, ㉣ ④ ㉡, ㉣
 ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $\{B \cup C\} \cap \{C\} = \{\{0, 1\}\} \cap \{\{1\}\} = \phi = A$
 ㉡ $\{B \cap C\} = \{\phi\} \neq \phi = A$
 ㉢ $U - \{B \cup C\} = \{0, 1, \{0, 1\}\} - \{\{0, 1\}\}$
 $= \{0, 1\} = B \cup C$
 ㉣ $A \cup B \cup C = \phi \cup \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} \neq \{\{0, 1\}\}$
 $\therefore$ ㉠, ㉢만 참이다.

8. 집합 A, B 에 대하여 연산 $\triangle$ 를 $A \triangle B = (A - B) \cup (B \cap A^c)$ 라고 정의하고, $n(A) = 8$, $n(A \cup B) = 16$, $n(A \cap B) = 5$, $n(A \cup B) = 16$, $n(A \cap B) = 5$ 일 때, $n((A \triangle B) \triangle A)$ 를 구하면? [배점 5, 중상]

① 5 ② 8 ③ 9 ④ 12 ⑤ 13

해설

$(A \triangle B) \triangle A = B$ 이므로 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $16 = 8 + n(B) - 5 \therefore n(B) = 13$

9. 어떤 반에서 A, B 두 종류의 책에 대하여 그것을 읽었는지 여부를 조사하였더니 A를 읽은 학생은 전체의 $\frac{1}{2}$, B를 읽은 학생은 전체의 $\frac{3}{5}$, 두 종류 모두 읽은 학생은 전체의 $\frac{3}{10}$, 하나도 읽지 않은 학생은 8명이었다. 반 전체의 학생 수는 몇 명인가? [배점 5, 중상]

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

A, B 두 종류의 책을 읽은 학생의 집합을 각각 A, B라 하고, 그 반 전체의 인원수를 N이라 하면, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{3}{10}\right)N = \frac{4}{5}N$
 따라서, $n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = N - n(A \cup B) = \frac{1}{5}N$
 그런데, $\frac{1}{5}N = 8$ 이므로 $N = 40$ (명)

10. $P(A) = \{x | x \subset A\}$ 라고 정의할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? [배점 5, 중상]

① $P(A) \supset A$ ② $P(A) \supset \{A\}$
 ③ $P(A) \supset \emptyset$ ④ $P(A) \ni \{A\}$
 ⑤ $P(A) \ni \emptyset$

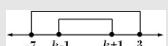
해설

$A = \{a, b\}$ 일 때, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
 $\rightarrow P(A) \ni A$,
 $\therefore P(A) \supset \{A\}$
 $\rightarrow P(A) \supset \emptyset$ (공집합은 모든 집합의 부분집합)
 $\rightarrow P(A) \ni \emptyset$ ($\emptyset$ 이 원소이므로)

11. 두 조건 $p: |x - k| \leq 1$, $q: -7 \leq x \leq 3$ 에서 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면? [배점 5, 중상]

① -12 ② -4 ③ 8
 ④ 4 ⑤ 12

해설

$p: |x - k| \leq 1$ 에서 $-1 \leq x - k \leq 1 \therefore k - 1 \leq x \leq k + 1 \dots \textcircled{1}$
 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $\textcircled{1}$ 이 $q: -7 \leq x \leq 3$ 에 포함되어야 한다.
 수직선에 나타내면

 $k - 1 \geq -7 \therefore k \geq -6$ $k + 1 \leq 3 \therefore k \leq 2$
 따라서 k의 최솟값은 -6, k의 최댓값은 2이다.
 $\therefore -6 + 2 = -4$

12. 두 명제 「겨울이 오면 춥다.」, 「추우면 눈이 온다.」가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은? [배점 5, 중상]

- ① 눈이 오지 않으면 춥지 않다.
 ② 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
 ③ 겨울이 어면 눈이 온다.
 ④ 눈이 오면 겨울이 온다.
 ⑤ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

해설

p : 겨울이 온다. q : 춥다. r : 눈이 온다.

라 하면 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이다.

- ① $q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim q$ (대우 명제)
 ② $p \Rightarrow q$ 이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ (대우 명제)
 ③ $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이므로
 $p \Rightarrow r$ (삼단논법)
 ④ $p \Rightarrow r$ 이라 해서 반드시
 $r \Rightarrow p$ 인 것은 아니다.
 ⑤ $p \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim p$ (대우명제)

13. 유리수 전체의 집합을 Q 라 하고, 자연수 $n(n \geq 2)$ 에 대하여 집합 A_n 을 $A_n = \left\{x \mid x - [x] = \frac{1}{n}, x \in Q\right\}$ 로 정의할 때, 다음 중에서 옳은 것은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 나타낸다.) [배점 5, 상하]

- ① $-\frac{4}{3} \in A_3$
 ② $A_2 \subset A_4$
 ③ $A_4 \subset A_2$
 ④ $A_2 \cap A_3 = \emptyset$
 ⑤ $A_5 = \left\{\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{5}, \dots, \frac{51}{5}\right\}$

해설

$[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 나타내므로 간단하게 정수라고 생각하면 되고, $x - [x]$ 는 x 의 소수 부분이다. 따라서 구하고자 하는 집합 A_n 의 원소 x 는 $x = [x] + \frac{1}{n}$ 이다.

$[x]$ 가 정수이므로 집합 A_n 은 $A_n = \left\{\dots, -2 + \frac{1}{n}, -1 + \frac{1}{n}, 0 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}, \dots\right\}$ 이 되고, n 대신에 2, 3, 4, 5, ...를 각각 대입해서 $A_2, A_3, A_4, A_5, \dots$ 를 구해 보면 $A_2 = \left\{\dots, -2 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}, \dots\right\} = \left\{\dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\right\}$ $A_3 = \left\{\dots, -2 + \frac{1}{3}, -1 + \frac{1}{3}, 0 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}, \dots\right\} = \left\{\dots, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \dots\right\}$ $A_4 = \left\{\dots, -2 + \frac{1}{4}, -1 + \frac{1}{4}, 0 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{\dots, -\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \dots\right\}$ $A_5 = \left\{\dots, -2 + \frac{1}{5}, -1 + \frac{1}{5}, 0 + \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{5}, 2 + \frac{1}{5}, \dots\right\} = \left\{\dots, -\frac{9}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{5}, \dots\right\}$ 이므로 $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ 임을 알 수 있다.

14. 두 조건 p, q 를 만족시키는 집합 $P = \{x \mid a < x < a+1\}$, $Q = \{x \mid x + \frac{1}{x} \leq -2\}$ 에 대하여 $p \rightarrow q$ 를 참이 되게 하는 실수 a 의 최댓값을 구하면? [배점 5, 상하]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

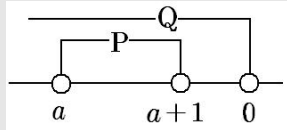
$$(i) \ x < 0 \text{ 이면 } x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} =$$

$$\frac{(x+1)^2}{x} \leq 0 \therefore x + \frac{1}{x} \leq -2$$

(ii) $x > 0$ 이면 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 이므로 Q 를 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $Q = \{x | x < 0\}$

$$\therefore P \subset Q \Leftrightarrow a + 1 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -1$$



따라서, $p \rightarrow q$ 를 참이 되게 하는 실수 a 의 최댓값은 -1 이다.

15. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. $p(n), p(n+1)$ 중 어느 하나가 참이면 $p(n+2)$ 가 참임을 알았다. 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이기 위한 필요충분조건은? [배점 5, 상하]

- ① $p(1)$ 이 참이다.
- ② $p(2)$ 가 참이다.
- ③ $p(1)$ 과 $p(2)$ 가 참이다.
- ④ $p(1)$ 과 $p(3)$ 이 참이다.
- ⑤ $p(2)$ 와 $p(3)$ 이 참이다.

해설

$p(n)$ 또는 $p(n+1)$ 이 참 $\Rightarrow p(n+2)$ 가 참

(i) $p(1)$ 은 참, $p(2)$ 는 거짓이라 하면,

$p(1) : \text{참} \Rightarrow p(3) : \text{참}$

$p(2)$ 또는 $p(3) : \text{참} \Rightarrow p(4) : \text{참}$

이와 같이 계속하여 $n \neq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 은 참이 된다.

(ii) $p(1)$ 은 거짓, $p(2)$ 는 참이라 하면,

$p(1)$ 또는 $p(2) : \text{참} \Rightarrow p(3) : \text{참}$

$p(2)$ 또는 $p(3) : \text{참} \Rightarrow p(4) : \text{참}$

이와 같이 계속하여 $n \neq 1$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 은 참이 된다.

(iii) $p(1), p(2)$ 가 모두 참이라 하면,

$p(3), p(4), \dots$ 도 계속 참이다.

따라서, (i), (ii), (iii)에서 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되려면 $p(1), p(2)$ 모두 참이어야 한다.

16. 민주, 한결, 은하, 겨레 4명의 학생은 각자가 적당한 시간에 봉사활동에 다녀오기로 하였으나 그 중 한명이 참석하지 못하였다. 그런데 네 명의 학생은 아래와 같이 서로 엇갈린 주장을 하고 있다. 이 진술 중 오직 하나만이 옳은 것일 때, 참석하지 못한 학생과 옳게 진술한 학생은?

민주: 한결이가 빠졌어.

한결: 민주가 한 말은 거짓말이야.

은하: 민주가 빠졌어.

겨레: 나는 안 빠졌어.

[배점 5, 상하]

- ① 겨레, 한결
- ② 겨레, 민주
- ③ 겨레, 은하
- ④ 민주, 한결
- ⑤ 민주, 은하

해설

- ㉠ 민주가 참 : 한결, 겨레가 빠진것이 되어 모순
 ㉡ 한결이 참 : 겨레가 빠짐
 ㉢ 은하가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
 ㉣ 겨레가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
 ∴ 한결의 진술이 참, 겨레가 참석하지 못함.

17. 다음 명제 ㉠, ㉡, ㉢가 각각 부등식 $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이기 위한 무슨 조건인지 순서대로 적으면? (단, a, b, c 는 실수)

- ㉠ a, b, c 중 적어도 하나는 1보다 크다.
 ㉡ a, b, c 의 최댓값이 1보다 크다.
 ㉢ a, b, c 의 최솟값이 1보다 크다.

[배점 5, 상하]

- ① 필요, 충분, 필요충분
 ② 충분, 필요충분, 충분
 ③ 필요, 필요충분, 충분
 ④ 충분, 필요, 필요충분
 ⑤ 필요, 필요, 충분

해설

- ㉠ $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이면, $a-1, b-1, c-1$ 중 하나 또는 셋이 양수이므로 필요조건 역으로 $a=2, b=2, c=-3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1) < 0$ 이므로 충분조건은 아니다. ∴ 필요조건
 ㉡ $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이면 a, b, c 중 하나 또는 셋이 1보다 크므로 최댓값은 1보다 크다. 역으로 $a=2, b=2, c=-3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1) < 0$ 이므로 충분조건은 아니다. ∴ 필요조건
 ㉢ a, b, c 의 최솟값이 1보다 크면 $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이므로 충분조건 역으로 $a=2, b=0, c=0$ 이면 최솟값은 0이므로 필요조건은 아니다. ∴ 충분조건

18. 자연수를 원소로 하는 두 집합 $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, $N = \{a_1+d, a_2+d, a_3+d, a_4+d, a_5+d, a_6+d\}$ 가 있다. $M \cap N = \{4, 7, 9\}$ 이고, M 의 원소의 합은 32이며, $M \cup N$ 의 원소의 합이 62일 때, d 의 값을 구하라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

4, 7, 9가 M 의 원소이므로, 나머지 원소를 b_1, b_2, b_3 라 하면, $M = \{4, 7, 9, b_1, b_2, b_3\}$
 $N = \{4+d, 7+d, 9+d, b_1+d, b_2+d, b_3+d\}$
 M 의 원소의 합이 32 이므로,

$$4+7+9+b_1+b_2+b_3=32 \therefore b_1+b_2+b_3=12 \dots \dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{또 } M \cup N \text{의 원소의 합이 62 이므로, } 32 + (4+d) + (7+d) + (9+d) + (b_1+d) + (b_2+d) + (b_3+d) - (4+7+9) = 62 \therefore (b_1+b_2+b_3) + 6d = 30 \dots \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에 } \textcircled{㉠} \text{을 대입하면, } 12 + 6d = 30 \therefore d = 3$$

19. 어느 학급의 키가 큰 순위별로 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E를 불러서 이들 다섯 명에게 키의 순위를 물었더니 다음 표와 같이 대답하였다. 이들이 모두 두 사람의 순위를 대답했지만 두 사람의 순위 중 하나는 옳고 하나는 틀리다고 한다. 이들의 대답으로 미루어 실제로 키가 제일 큰 사람은?

	A	B	C	D	E
1		B			A
2	D	C		D	
3	A		C		
4				E	E
5			B		

[배점 6, 상중]

- ① A ② B ③ C ④ D ⑤ E

해설

문제에 주어진 표에서 각 열마다 하나는 옳고 하나는 틀리므로, 만일 A 열에서 D가 2위라면 D 열에서 E는 4위가 아니다. $\Rightarrow$ E 열에서 A가 1위 $\Rightarrow$ B 열에서 C가 2위따라서 D와 C가 동시에 2위가 되어 모순이다.

따라서, A 열에서 D는 2위가 아니므로 A가 3위이다. $\Rightarrow$ C 열에서 B가 5위 $\Rightarrow$ B 열에서 C가 2위 $\Rightarrow$ D 열에서 E가 4위 따라서 A, B, C, E는 각각 3위, 5위, 2위, 4위이므로 나머지 D가 1위이다.

20. 학생 수가 50명인 학급에서 생일을 조사하였을 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ 5명 이상의 생일이 있는 달이 있다.
 ㉡ 모든 달에 생일이 있다.
 ㉢ 8명 이상의 생일이 있는 요일이 있다.
 ㉣ 생일이 같은 학생이 존재한다.

[배점 6, 상중]

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉢, ㉣
 ④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

㉠ 50명의 생일이 12달에 가장 골고루 퍼져 있을 때, $50 = 12 \times 4 + 2$ 이므로 매달 4 명씩 생일이 있고 나머지 2명은 어느 달인가에 추가되어야 하므로, 5 명 이상의 생일이 있는 달이 반드시 존재한다.

㉡ 50명 모두 특정한 달에는 생일이 있지 않을 수도 있으므로 거짓이다.

㉢ ㉠와 마찬가지로 생각해 보면, 50명의 생일이 일곱 요일에 가장 골고루 퍼져 있을 때는 $50 = 7 \times 7 + 1$ 이므로 어느 요일인가에 8명의 생일이 있다. 따라서, 참이다.

㉣ 어느 특정한 날에 생일이 같은 학생은 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있다.

그러므로 위의 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣ 중에서 항상 맞는 것은 ㉠와 ㉢이다.