단원 종합 평가

1. 다음에서 두 집합 A, B가 서로소인 것을 고르면? [배점 3, 하상]

① $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{x|x$는 5보다 작은 소수$\}$

② $A=\{x|x\geq 1$인 실수$\}$, $B=\{x|x\leq 1$인 실수$\}$

③ $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

④ $A=\{3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{x|x$는 $-1<x\leq 3$인 정수$\}$

⑤ $A=\{x|x=2n+1,\ n$은 자연수$\}$,$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

해설

$A=\{x|x=2n+1,\ n$은 자연수$\}=\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots\}$

2. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ a^2+2\}$, $B=\{1,2a-3,2a+1\}$에 대하여 $A\cap B=\{1,3\}$이 되도록 할 때, a값을 구하시오. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=1$

해설

$A\cap B=\{1,3\}$ 이므로 집합 A에서 $a^2+2=3$,
따라서 $a=\pm 1$
i) $a=1$ 이면 $B=\{-1,1,3\}$
ii) $a=-1$ 이면 $B=\{-5,-1,1\}$
$A\cap B=\{1,3\}$ 이므로 $\therefore a=1$

3. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은? [배점 3, 하상]

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.

② 자연수 $n,\ m$에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ $a,\ b$가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 $a,\ b$에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p 의 배수이면, n은 p의 배수이다.(참)
② : 대우는 'nm 은 홀수이면 n^2+m^2 이 짝수이다'
nm은 홀수, 즉 n,m 모두 홀수이면 n^2,m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다. $\therefore$ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2},b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 $a,\ b$가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a\leqq 1$ 그리고 $b\leqq 1$이면 $a+b\leqq 2$ (참)

4. 전체집합 U의 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여 $(A^c\cap B)\cup(A\cap B^c)=\varnothing$의 관계가 성립하면, A와 B의 포함 관계는 ? [배점 3, 중하]

① $A\subset B$ ② $B\subset A$ ③ $A=B$
④ $A^c=B$ ⑤ $A=B^c$

해설

$A \cap B^c = A - B$ 이므로 $(B-A) \cup (A-B) = \varnothing$
$\therefore B - A = \varnothing,\ A - B = \varnothing$ $(\because (B-A)$와$A-$
B는서로소$)$
$\therefore B \subset A,\ A \subset B$ 즉 $A = B$

5. 50명의 학생에게 $a,\ b$ 두 문제를 풀게 하였다. $a,\ b$를 푼 학생은 각각 22명, 35명이고, $a,\ b$를 모두 못 푼 학생은 5명이라고 할 때, $a,\ b$를 모두 푼 학생의 수를 구하시오. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 명

해설

전체 학생의 집합을 U , a를 푼 학생의 집합을 A , b를 푼 학생의 집합을 B라고 하면 $n(U) = 50$, $n(A) = 22$, $n(B) = 35$, $n(A^c \cap B^c) = 5$
$\therefore\ n(A \cap B)$
$= n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
$= n(A) + n(B) - \{n(U) - n((A \cup B)^c)\} = n(A) + n(B) - \{n(U) - n(A^c \cap B^c)\}$
$= 22 + 35 - (50 - 5) = 57 - 45$
$= 12$(명) 따라서, 구하는 학생의 수는 12명

6. 다음<보기>의 ( )안에 알맞은 것을 차례로 적어시오.(가) 세 집합 $A,\ B,\ C$ 에 대하여 $A \cup C = B \cup C$ 인 것은 $A = B$ 이기 위 한 ( )조건이다.(나) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ 은 $x = y = 0$ 이기 위한 ( )조건이다. [배점 3, 중하]

① 충분, 충분

② 필요, 충분

③ 필요, 필요

④ 필요충분, 필요

⑤ 필요충분, 필요충분

해설

(가) $A \cup C = B \cup C$
⇐
$A = B$ 반례) $A = \{1\},\ B = \{2\},\ C = \{1,\ 2\}$ 인 경우 $\therefore$ 필요조건
(나) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$, $(x-y)^2 = 0$ 이므로 $x = y$ ⇍ $x = y = 0$ $\therefore$ 필요조건

7. 다음은 명제「x, y가 정수일 때 xy가 짝수이면 x, y 중 적어도 하나는 짝수이다.」를 증명하는 과정이다.

주어진 명제의 결론을 부정하여 (가)이면 $x = 2m+1, y =$ (나)(m, n 은 정수) 이라 할 수 있다. 이 때, $xy = 2(mn+m+n)+1$ 이므로 xy는 홀수이다. 이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은? [배점 3, 중하]

① x 또는 y 가 짝수, $2n$

② x , y 중 하나만 짝수, $2n$

③ x , y 중 하나만 홀수, $2n+1$

④ x , y 모두 홀수, $2n+1$

⑤ x , y 모두 짝수, $2n+1$

해설

주어진 명제의 결론을 부정하여 x, y가 모두 (가): 홀수이면 $x = 2m+1$, (나) : $y = 2n+1$ (m, n 은 정수)이라 할 수 있다. 이 때, $xy = 2(2mn+m+n)+1$ 이므로 xy는 홀수이다. 이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

8. 두 집합 A, B가 전체집합 U의 부분집합일 때, 다음을 간단히 하면?

$(A \cup B) \cap [(A^c \cap B^c)^c \cap (A^c \cap B)^c]$

[배점 4, 중중]

① A ② B ③ U

④ $\varnothing$ ⑤ $A \cap B$

해설

$(A \cup B) \cap [(A^c \cap B^c)^c \cap (A^c \cap B)^c] = (A \cup B) \cap [(A \cup B) \cap (A \cup B^c)] = (A \cup B) \cap [A \cup (B \cap B^c)]$
$= (A \cup B) \cap A = A$

9. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A * B = (A \cup B)^c$ 으로 정의할 때, 다음 중 $(B * A) * B$와 항상 같은 것은? [배점 4, 중중]

① A ② B ③ $A - B$

④ $B - A$ ⑤ A^c

해설

$(B * A) * B = ((BUA)^c \cup B)^c = (B \cup A) \cap B^c$
$= (A \cup B) - B = A - B$

10. 자연수 k의 양의 배수의 집합을 A_k라 하자. $(A_{12} \cup A_{18}) \subset A_k$ 인 k의 최댓값을 M $(A_6 \cap A_8) \supset A_k$ 인 k의 최솟값을 m이라 할 때, $M + m$의 값을 구하라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$(A_{12} \cup A_{18}) \subset A_k$ 이므로 $A_{12} \subset A_k$, $A_{18} \subset A_k$ 따라서 k는 12의 약수이면서 18의 약수이고 최대인 것이다. $\therefore M = 6 \leftarrow 12, 18$ 의 최대공약수,
또 $(A_6 \cap A_8) \supset A_k$ 이므로 $A_k \subset A_6$, $A_k \subset A_8$
따라서, k 는 6의 배수이면서 8의 배수이고 최소인 것이다. $\therefore m = 24 \leftarrow 6, 8$ 의 최소공배수
$\therefore M + m = 30$

11. 실수 x에 대하여 두 조건 $p : x^2 - ax + 8 \neq 0$, $q : x - 2 \neq 0$일 때, p 가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

p가 q이기 위한 충분조건이면 $p \Rightarrow q$
$p \rightarrow q\ (T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p\ (T)$이므로$(x = 2 \Rightarrow x^2 - ax + 8 = 0)$이 참인 조건을 구하면 된다.$4 - 2a + 8 = 0$
$\therefore\ a = 6$

12. 세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하고, $P \cap R = Q$ 인 관계가 성립한다고 할 때, 다음 중 참인 명제는? [배점 4, 중중]

① $p \rightarrow q$ ② $p \rightarrow \sim r$ ③ $q \rightarrow r$
④ $r \rightarrow p$ ⑤ $r \rightarrow \sim q$

해설

세 조건 p, q, r 의 진리집합이 $P \cap R = Q$ 인 관계를 성립하므로 $Q \subset P$, $Q \subset R$ 이다. 따라서, $q \rightarrow p$, $q \rightarrow r$ 등이 참인 명제가 된다.

13. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\sim r \rightarrow \sim q$가 모두 참이라고 할 때, 다음 보기 중에서 참인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $q \rightarrow r$ ㉡ $p \rightarrow r$
㉢ $\sim r \rightarrow \sim p$ ㉣ $p \rightarrow \sim r$
㉤ $\sim q \rightarrow \sim p$

[배점 4, 중중]

① ㉠, ㉡, ㉢, ㉣ ② ㉠,㉡
③ ㉠, ㉡, ㉢ ④ ㉢, ㉤
⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

$\sim r \rightarrow \sim q$ 가 참이면 그 대우인 $q \rightarrow r$ ㉠이 참
$p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$ 이 참이므로 $p \rightarrow r$
㉡가 참이고 그 대우인 $\sim r \rightarrow \sim p$ ㉢이 참
$p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우인 $\sim q \rightarrow \sim p$ ㉤가 참

14. 세 권의 책 A, B, C 가 있다. A를 읽은 학생은 5명, B를 읽은 학생은 4 명, C를 읽은 학생은 7명, A와 B를 모두 읽은 학생은 3명, 세 권을 모두 읽은 학생은 2명일 때, C만 읽은 학생의 수가 가장 적을 경우는 몇 명인가? [배점 5, 중상]

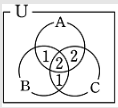
① 1 명 ② 2 명 ③ 3 명

④ 4 명 ⑤ 5 명

해설

집합 A, B, C를 각각 책 A, B, C를 읽은 학생들의 집합이라 하면 $n(A) = 5$, $n(B) = 4$, $n(C) = 7$, $n(A \cap B) = 3$, $n(A \cap B \cap C) = 2$

C만 읽는 학생수가 가장 적을 때는 A와 C, B와 C를 읽은 학생수가 가장 많은 경우로 벤다이어그램에서



$7 - (2 + 2 + 1) = 2$(명)

15. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 X 에 대하여, 집합 $B = \{2, 4, 7\}$, $B \cap X \neq \phi$ 일 때, 집합 X 의 개수를 구하라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 24 개

해설

원소 개수가 n 개 인 집합의 부분집합 개수는 2^n 개 이다.

⇒ 집합 A 의 부분집합의 개수 : $2^5 = 32$

먼저 $B \cap X = \phi$ 인 경우를 계산해 보면$\{1, 3, 5\}$ 의 부분집합의 개수, 즉 $2^3 = 8$ 이 된다.$\therefore B \cap X \neq \phi$ 인 부분집합 X 의 개수는 $32 - 8 = 24$

16. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 것의 개수를 구하면? [배점 5, 중상]

① 32 ② 56 ③ 64

④ 72 ⑤ 120

해설

'적어도~ '문제에서는 반대의 경우의 수를 구하여 모든 경우의 수에서 빼준다.

모든 부분집합의 수 : $2^6 = 128$ 짝수로만 만들 수 있는 부분집합의 수 : $2^3 = 8$

$\therefore 128 - 8 = 120$

17. 두 조건 p_n, $q_n(n=1,\ 2)$에 대하여 $P_n=\{x|x$는 p_n을 만족한다.$\}$, $Q_n=\{x|x$는 q_n을 만족한다.$\}$ 이고, p_1 은 p_2이기 위한 필요조건, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 5, 중상]

① $P_1\cap P_2=P_2$

② $P_1\cap Q_1=Q_1$

③ $(P_1\cup Q_1)\cup P_2=P_1$

④ $(P_1\cup Q_1)\cap P_2=P_2$

⑤ $(P_1\cap Q_1)\cup Q_2=Q_1$

해설

p_1 은 P_2이기 위한 필요조건이므로 $P_1\supset P_2$, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건이므로 $P_1\supset Q_1$, $P_2\supset Q_2$

① $P_1\cap P_2=P_2$

② $P_1\cap Q_1=Q_1$

③ $(P_1\cup Q_1)\cup P_2=P_1\cup P_2=P_1$

④ $(P_1\cup Q_1)\cap P_2=P_1\cap P_2=P_2$

⑤ $(P_1\cap Q_1)\cup Q_2=Q_1\cup Q_2\neq Q_1$ 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

18. 실수 전체의 두 부분 집합 A, B 가 두 조건

· $1\in A$
· $x\in A$ 이면 $x+1\in A$ 이고 $x-1\in B$

를 만족할 때, 다음<보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ A 는 모든 자연수를 원소로 갖는다.

㉡ A 의 원소는 모두 B 의 원소이다.

㉢ B 는 최대 원소를 갖는다.

㉣ B 는 정수 전체 집합의 부분집합이다.

[배점 5, 상하]

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉡, ㉣ ④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $x\in A$ 이면 $x+1\in A$ 이고 $1\in A$ 이므로 $1+1=2\in A,\ 2+1=3\in A,\ \cdots$
$\therefore A\supset\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ (참)

㉡ $x\in A\to x+1\in A\to(x+1)-1\in B$
$\therefore\ x\in A\to x\in B$ (참)

㉢ $B\supset\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ 따라서 B는 무한 집합이므로 최대 원소는 없다.

㉣ $\dfrac{1}{2}\in A$이면 B에는 정수가 아닌 원소가 들어있게 되므로 거짓이다.(조건에서 $1\in A$라고 해서 1이외의 수가 A의 원소가 될 수 없다는 의미는 아니다.)

19. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. $p(n)$, $p(n+1)$ 중 어느 하나가 참이면 $p(n+2)$ 가 참임을 알았다. 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이기 위한 필요충분조건은? [배점 5, 상하]

① $p(1)$ 이 참이다.

② $p(2)$ 가 참이다.

③ $p(1)$ 과 $p(2)$ 가 참이다.

④ $p(1)$ 과 $p(3)$ 이 참이다.

⑤ $p(2)$ 와 $p(3)$ 이 참이다.

해설

$p(n)$ 또는 $p(n+1)$ 이 참 $\Rightarrow$ $p(n+2)$ 가 참
(i) $p(1)$ 은 참, $p(2)$ 는 거짓이라 하면,
$p(1)$: 참 $\Rightarrow$ $p(3)$: 참
$p(2)$ 또는 $p(3)$: 참 $\Rightarrow$ $p(4)$: 참
이와 같이 계속하여 $n \neq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 은 참이 된다.
(ii) $p(1)$ 은 거짓, $p(2)$ 는 참이라 하면,
$p(1)$ 또는 $p(2)$: 참 $\Rightarrow$ $p(3)$: 참
$p(2)$ 또는 $p(3)$: 참 $\Rightarrow$ $p(4)$: 참
이와 같이 계속하여 $n \neq 1$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 은 참이 된다.
(iii) $p(1)$, $p(2)$ 가 모두 참이라 하면,
$p(3)$, $p(4)$, $\cdots$ 도 계속 참이다.
따라서, (i), (ii), (iii) 에서 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대 하여 참이 되려면 $p(1)$, $p(2)$ 모두 참이어야 한다.

20. 두 명제 「겨울이 오면 춥다.」와 「눈이 오지 않으면 춥지 않다.」가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은? [배점 5, 상하]

① 추우면 눈이 온다.

② 눈이 오면 겨울이 온다.

③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

p : 겨울이 온다. q : 춥다. r : 눈이 온다. 주어진 명제는 $p \Rightarrow q$, $\sim r \Rightarrow \sim q$이므로 각각 그 대우인 $\sim q \Rightarrow \sim p$, $q \Rightarrow r$도 성립하고 $p \Rightarrow q \Rightarrow r$이 되어$p \Rightarrow r$과 그 대우 $\sim r \Rightarrow \sim p$도 성립한다.
① 추우면 눈이 온다.($q \Rightarrow r$) 옳다.
② 눈이 오면 겨울이 온다.($r \Rightarrow p$) 옳지 않다.
③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다. ($\sim r \Rightarrow \sim p$) 옳다.
④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.($\sim q \Rightarrow \sim p$) 옳다.
⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.($p \Rightarrow r$) 옳다.