단원 종합 평가

1. $x-4=0$ 이 $x^2+ax-48=0$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값은? [배점 3, 하상]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x-4=0 \Rightarrow x^2+ax-48=0$

$\therefore\ 16+4a-48=0$

$\therefore\ a=8$

2. 다음 ( ) 안에 알맞은 말을 쓰시오. 이등변삼각형 ABC 는 정삼각형이기 위한 ( ) 조건이다. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 필요

해설

이등변삼각형이 정삼각형을 포함한다.

3. 어느 학급에서 경주, 부여, 제주에 가본 적이 있는 학생들의 집합을 각각 G, B, J 라고 하자. 이때 다음과 같은 학생들의 집합을 G, B, J로 나타내면?

경주와 부여 두 곳을 모두 가본 적이 있거나 부여와 제주 두 곳을 모두 가본 적이 있다.

[배점 3, 중하]

① $(B\cap G)\cup J$

② $B\cap(G\cup J)$

③ $B\cup(G\cap J)$

④ $(B\cup G)\cap J$

⑤ $G\cap(B\cup J)$

해설

$(G\cap B)\cup(B\cap J)=(B\cap G)\cup(B\cap J)=B\cap(G\cup J)$

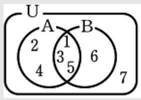
4. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)=\{2,\ 4,\ 6\}$ 을 만족하는 집합 B 의 모든 원소의 합은? [배점 3, 중하]

① 5 ② 9 ③ 15 ④ 21 ⑤ 37

해설

$(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c=(A\cup B)-(A\cap B)=\{2,\ 4,\ 6\}$

벤 다이어그램을 그려보면 다음 그림에서 어두운 부분과 같다.



$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 이므로 $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 6\}$ 이다. 따라서, 집합 B 의 모든 원소의 합은 $1+3+5+6=15$ 이다.

5. 세 조건 $p,\ q,\ r$ 에 대하여 r 이 $\sim q$ 이기 위한 충분조건, q 가 p 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 반드시 참 이라고 할 수 <u>없는</u> 것은? [배점 3, 중하]

① $p \rightarrow q$ ② $r \rightarrow \sim q$

③ $p \rightarrow \sim r$ ④ $q \rightarrow \sim r$

⑤ $\sim p \rightarrow r$

해설

$r \rightarrow \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow \sim r(T) \cdots$ ㉠
$p \rightarrow q(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T) \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $r \rightarrow \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow r \rightarrow \sim p(T)$
$\Rightarrow p \rightarrow \sim r(T)$

6. 두 집합 $A,\ B$에 대하여 $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap B = A$ 가 성립할 때, 집합 $A,\ B$ 사이의 관계로 옳지 <u>않은</u> 것은? [배점 4, 중중]

① $A\cap B = A$ ② $A\cup B = B$

③ $A-B=\varnothing$ ④ $A^c \subset B^c$

⑤ $A\cap B^c = \varnothing$

해설

$(A-B)\cup(A\cap B) = A$
$A\cap B = A \therefore A\subset B$
$\Rightarrow A\cup B = B$
$\Rightarrow B^c \subset A^c$
$\Rightarrow A-B = A\cap B^c = \phi$

7. $U=\{a,b,c,d,e\}$ 일 때, $\{d,e\}\cap A \neq \phi$ 을 만족시키는 U 의 부분집합 A 의 개수를 구하면? [배점 4, 중중]

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 32 ⑤ 64

해설

$\{d,\ e\}\cap A\neq\phi$ 이므로 집합 A 의 원소에는 d 와 e 가 꼭 속한다. 즉, $2^{5-2}=2^3=8$

8. $x \geq a$ 가 $-1 < x < 1$ 의 필요조건이 되기 위한 a 의 최댓값을 구하면 ? [배점 4, 중중]

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ -2

④ $-\dfrac{3}{2}$ ⑤ -5

해설

$\{x|-1<x<1\}\subset\{x|x\geq a\}$ 이어야 하므로
$a\leq -1$
따라서, a 의 최댓값은 -1 이다.

9. 다음은 명제 「$a,\ b,\ c$가 양의 정수일 때, $a^2+b^2=c^2$ 이면 $a,\ b,\ c$중 적어도 하나는 짝수이다.」의 증명이다.

증명

주어진 명제의 대우는 「$a,\ b,\ c$가 양의 정수일 때, $a,\ b,\ c$가 (가)이면 $a^2+b^2 \neq c^2$ 이다.」$a,\ b,\ c$ 가 (가)이면, $a^2,\ b^2,\ c^2$ 은 모두 홀수이므로 a^2+b^2 은 (나), c^2 은 (다)가 되어 $a^2+b^2 \neq c^2$ 이다. 따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [배점 4, 중중]

① 적어도 하나는 홀수, 홀수, 짝수

② 적어도 하나는 홀수, 짝수, 홀수

③ 모두 홀수, 홀수, 짝수

④ 모두 홀수, 짝수, 홀수

⑤ 모두 짝수, 홀수, 짝수

해설

'$a,\ b,\ c$중 적어도 하나는 짝수이다.' 의 부정은 '$a,\ b,\ c$ 모두 홀수이다.' 따라서 주어진 명제의 대우는 「$a,\ b,\ c$ 가 양의 정수일 때, $a,\ b,\ c$ 가 (모두 홀수)이면 $a^2+b^2 \neq c^2$ 이다.」$a,\ b,\ c$ 가 모두 홀수이면 $a^2,\ b^2,\ c^2$ 은 모두 홀수 a^2+b^2 은 (홀수)+ (홀수) 로 (짝수), c^2 은 (홀수)이므로 $a^2+b^2 \neq c^2$

10. 세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하고, $P \cap R = Q$ 인 관계가 성립한다고 할 때, 다음 중 참인 명제는? [배점 4, 중중]

① $p \to q$　② $p \to \sim r$　③ $q \to r$

④ $r \to p$　⑤ $r \to \sim q$

해설

세 조건 p, q, r 의 진리집합이 $P \cap R = Q$ 인 관계를 성립하므로 $Q \subset P,\ Q \subset R$ 이다. 따라서, $q \to p$, $q \to r$ 등이 참인 명제가 된다.

11. 어느 반의 63%의 학생은 공부를 잘하고 76%의 학생은 운동을 잘한다. 운동도 잘하고 공부도 잘하는 학생수의 최대, 최소 %(백분율)는 각각 얼마인가 ? [배점 5, 중상]

① 최대 89%, 최소 13%

② 최대 63%, 최소 39%

③ 최대 76%, 최소 37%

④ 최대 39%, 최소 24%

⑤ 최대 76%, 최소 39%

해설

전체집합을 U , 공부를 잘하는 학생의 집합을 A , 운동을 잘하는 학생의 집합을 B 라 하면 공부도, 운동도 잘하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다. $A \cap B$ 의 원소의 개수는 $A \subset B$ 일 때 최대가 되고, $A \cap B$ 의 원소의 개수는 $A \cup B = U$ 일 때 최소가 된다. $A \subset B$ 일 때 $A \cap B = A$ 이므로 $n(A \cap B) = n(A) = 63\%$
$A \cup B = U$ 일 때 $n(A \cup B) = 100\%$ 이므로 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(U) = 63 + 76 - 100 = 39\%$
따라서, 최대 63%, 최소 39%

12. $S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중 적어도 한 개의 홀수를 원소로 가지는 것의 개수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 27 개

해설

공집합과 짝수만을 원소로 가지는 부분집합은 제외한다.∴ $2^5 - 2^2 - 1 = 27$(개)

13. 전체 집합 U 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $(A-B)^c = B - A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

[배점 5, 중상]

① $A \cap B = \varnothing$

② $A \cup B = U$

③ $A \subset B^c$

④ $A^c \cup B = U$

⑤ $A = B^c$

해설

$(A-B)^c = (A\cap B^c)^c = A^c \cup B$, $B - A = A^c \cap B$

$A^c \cup B = A^c \cap B$ 에서 $A^c = B$ 즉, $A = B^c$

14. 다음 명제 ㉠, ㉡, ㉢가 각각 부등식 $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$이기 위한 무슨 조건인지 순서대로 적으면? (단, $a,\ b,\ c$ 는 실수)

㉠ $a,\ b,\ c$ 중 적어도 하나는 1보다 크다.

㉡ $a,\ b,\ c$ 의 최댓값이 1보다 크다.

㉢ $a,\ b,\ c$ 의 최솟값이 1보다 크다.

[배점 5, 상하]

① 필요, 충분, 필요충분

② 충분, 필요충분, 충분

③ 필요, 필요충분, 충분

④ 충분, 필요, 필요충분

⑤ 필요, 필요, 충분

해설

㉠ $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이면, $a-1,\ b-1,\ c-1$ 중 하나 또는 셋이 양수이 므로 필요조건 역으로 $a = 2,\ b = 2,\ c = -3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1) < 0$ 이므로 충분조건은 아 니다. ∴ 필요조건

㉡ $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이면 $a,\ b,\ c$ 중 하나 또는 셋이 1 보다 크므로 최댓값은 1 보다 크다. 역으로 $a = 2,\ b = 2,\ c = -3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1) < 0$ 이므로 충분조건은 아니다. ∴ 필요조건

㉢ $a,\ b,\ c$ 의 최솟값이 1 보다 크면 $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이므로 충분조건 역으로 $a = 2,\ b = 0,\ c = 0$ 이면 최솟값은 0 이 므로 필요조건은 아 니다. ∴ 충분조건

15. 다음 중 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가?

㉠ $p : xy = |xy|$ $q : x > 0,\ y > 0$

㉡ $p : xy + 1 > x + y > 2$ $q : x > 1,\ y > 1$

㉢ $p : xy = 0$ $q : |x - y| = |x + y|$

㉣ $p : |x| + |y| > |x + y|$ $q : x + y \geq 2$

㉤ $p : x \geq 1,\ y >= 1$ $q : x + y \geq 2$

㉥ $p : x + y = 0,\ xy = 0$ $q : x = 0,\ y = 0$

㉦ $p : x + y\sqrt{2} = 0$ $q : x = y = 0$ (x, y는 유리수)

㉧ $p : |x| = |y|$ $q : x^2 = y^2$

[배점 5, 상하]

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개

④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

㉡ ㉢ ㉥ ㉦ ㉧