

단원 종합 평가

1. 두 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{a_3, a_4, a_5, a_6\}$ 에 대하여 조건 $A \cap X = X$ 및 $(A - B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?
[배점 3, 중하]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$, $(A - B) \cup X = X$ 에서 $(A - B) \subset X$ 따라서, $(A - B) \subset X \subset A$ 이므로 X 는 A 의 부분집합 중에서 $A - B = \{a_1, a_2\}$ 를 포함하므로 A 의 부분집합 중에서 a_1, a_2 를 모두 포함하는 것의 개수이므로 $\therefore 2^{5-2} = 2^3 = 8(\text{개})$

2. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 할 때, ' p 또는 $\sim q$ '를 만족하는 집합을 구하면?
[배점 3, 중하]

- ① $P - Q$ ② $Q - P$ ③ $P^c \cup Q$
④ $P \cup Q^c$ ⑤ $P \cap Q^c$

해설

조건 $\sim q$ 를 만족하는 집합이 Q^c 이므로 ' p 또는 $\sim q$ '를 만족하는 집합은 $P \cup Q^c$ 이다.

3. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $\{(A - B) \cup (A \cap B)\} \cap B = A$ 가 성립할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은? (단, $U \neq \phi$)
[배점 4, 중중]

- ① $A \cup B = A$ ② $A - B = U$
③ $A \cap B^c = \phi$ ④ $A^c \subset B^c$
⑤ $A^c \cup B = \phi$

해설

$\{(A - B) \cup (A \cap B)\} \cap B = \{(A \cap B^c) \cup (A \cap B)\} \cap B$
 $= \{A \cap (B^c \cup B)\} \cap B = (A \cap U) \cap B = A \cap B$
 $\therefore A \cap B = A \rightarrow A \subset B$
※ $A \subset B$ 일 때,
i) $A \cup B = B$
ii) $A \cap B = A$
iii) $A - B = A \cap B = \phi$
iv) $A^c \cup B = U$
v) $B^c \subset A^c$

4. 두 집합 A, B 에 대하여 $\{(A - B) \cup (A \cap B)\} \cap B = A$ 가 성립할 때, 집합 A, B 사이의 관계로 옳지 않은 것은?
[배점 4, 중중]

- ① $A \cap B = A$ ② $A \cup B = B$
③ $A - B = \emptyset$ ④ $A^c \subset B^c$
⑤ $A \cap B^c = \emptyset$

해설

$$\begin{aligned}(A - B) \cup (A \cap B) &= A \\ A \cap B &= A \therefore A \subset B \\ \Rightarrow A \cup B &= B \\ \Rightarrow B^c &\subset A^c \\ \Rightarrow A - B &= A \cap B^c = \phi\end{aligned}$$

5. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 명제 중 반드시 참인 것을 모두 고르면?

- | | |
|-------------------------------|--------------------------|
| ㉠ $\sim q \rightarrow \sim p$ | ㉡ $r \rightarrow \sim p$ |
| ㉢ $r \rightarrow p$ | ㉣ $p \rightarrow r$ |
| ㉤ $\sim q \rightarrow p$ | |

[배점 4, 중중]

- ① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉣, ㉤
④ ㉠, ㉣ ⑤ ㉡, ㉤

해설

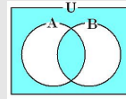
$p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 가 참이면 그 대우인 $\sim q \rightarrow \sim p$, $q \rightarrow \sim r$ 이 참 $p \rightarrow q \rightarrow \sim r$ 이므로 $p \rightarrow \sim r$ 가 참이고 그 대우인 $r \rightarrow \sim p$ 가 참

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 등식 $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = U$ 가 성립할 때, 다음 중 A, B 사이의 관계를 가장 바르게 나타낸 것은? [배점 5, 중상]

- ① $A \cup B = U$ ② $A \cap B = B$
③ $A - B = \emptyset$ ④ $A = B$
⑤ $A \cap B = \emptyset$

해설

$(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c = U$
이므로 벤다이어그램을 그려보면 하얀 부분, 즉 $(A - B) \cup (B - A) = \emptyset$ 이 됨을 알 수 있다.



따라서 $A - B = \emptyset$ 이고 $B - A = \emptyset$ ($\because P \cup Q = \emptyset$ 이면 $P = \emptyset$ 이고 $Q = \emptyset$)
 $A \subset B, B \subset A$ ($\because P - Q = \emptyset$ 이면 $P \subset Q$)
 $\therefore A = B$ ($\because P \subset Q, Q \subset P$ 이면 $P = Q$)

7. 음이 아닌 정수 전체의 집합의 세 부분집합 $A = \{x|x \text{는 } 10 \text{보다 작은 소수}\}$, $B = \{x|x = (3^n \text{의 일의 자리수}), n \text{은 자연수}\}$, $C = \{x|x = (7^n - 4 \text{의 일의 자리수}), n \text{은 자연수}\}$ 에 대하여, $C - (A \cap B) = \{a, b\}$ 이다. 이 때 두 수 a, b 의 차를 구하시오. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

3^n 에서 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입해 보면 3, 9, 27, 81, 243, ... 이므로 일의 자리수는 3, 9, 7, 1 이 반복된다. $\therefore B = \{1, 3, 7, 9\}$

7^n 에서 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입해 보면 7, 49, 343, 2401, 16807, ... $\therefore C = \{3, 5, 7, 9\}$
 $\therefore C - (A \cap B) = \{5, 9\}$ 따라서, 두 수 a, b 의 차는 4이다.

8. 다음은 a, b 가 실수일 때, 보기 중에서 서로 동치인 것끼리 짝지어 놓은 것이다. 옳지 않은 것은?

㉠ $ab = 0$

㉡ $a^2 + b^2 = 0$

㉢ $a^2 + b^2 > 0$

㉣ $a = 0$ 이고 $b = 0$

㉤ $a = 0$ 또는 $b = 0$

㉥ $a = 0$ 이고 $b \neq 0$

㉦ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$

㉧ $ab = 0$ 이고 $b \neq 0$

㉨ $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$

[배점 5, 중상]

- ① ㉠과 ㉡ ② ㉡와 ㉣ ③ ㉣과 ㉦
 ④ ㉤와 ㉧ ⑤ ㉢과 ㉨

해설

$$ab \leftrightarrow a = 0 \text{ 또는 } b = 0 \quad a^2 + b^2 \leftrightarrow a = 0 \text{ 이고 } b = 0 \quad a^2 + b^2 > 0 \leftrightarrow a \neq 0 \text{ 또는 } b \neq 0$$

$$ab = 0 \text{ 이고 } b \neq 0 \leftrightarrow a = 0 \text{ 이고 } b \neq 0$$

9. 자연수 n 에 대하여 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ 로 정의된다. 예를 들어, $1! = 1$, $2! = 2 \times 1$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 이다. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 에서 두 조건 p, q 가 각각 p : 일의 자리가 0인수, q : 자리수가 네 자리 이상인 수 일 때, 조건 “ p 이고 $\sim q$ ”를 만족하는 집합의 원소의 개수는? [배점 5, 중상]

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$$“p \text{ 이고 } \sim q” \Rightarrow P \cap Q^c = P - Q$$

i) 일의 자리가 0인 수 중 네자리 미만인 수일의 자리가 0이기 위해서는 인수로 2, 5를 가져야 한다.

$$5! = \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 120$$

$$\text{ii) } 6! = 6 \times \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 720$$

10. 자연수를 원소로 갖는 집합 A 가 다음 조건을 만족할 때, 집합 A 의 개수는?

$$x \in A \text{ 이면 } \frac{16}{x} \in A$$

[배점 5, 상하]

- ① 4개 ② 5개 ③ 6개
 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$$1 \in A \text{ 이면 } \frac{16}{1} = 16 \in A,$$

$$2 \in A \text{ 이면 } \frac{16}{2} = 8 \in A,$$

$$4 \in A \text{ 이면 } \frac{16}{4} = 4 \in A$$

따라서 집합 A 는

$\{4\}$, $\{1, 16\}$, $\{2, 8\}$, $\{1, 4, 16\}$, $\{2, 4, 8\}$,
 $\{1, 2, 8, 16\}$, $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ 의 7개다.

11. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. $p(n)$, $p(n+1)$ 중 어느 하나가 참이면 $p(n+2)$ 가 참임을 알았다. 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이기 위한 필요충분조건은? [배점 5, 상하]

- ① $p(1)$ 이 참이다.
 ② $p(2)$ 가 참이다.
 ③ $p(1)$ 과 $p(2)$ 가 참이다.
 ④ $p(1)$ 과 $p(3)$ 이 참이다.
 ⑤ $p(2)$ 와 $p(3)$ 이 참이다.

해설

$p(n)$ 또는 $p(n+1)$ 이 참 $\Rightarrow p(n+2)$ 가 참

(i) $p(1)$ 은 참, $p(2)$ 는 거짓이라 하면,

$p(1)$: 참 $\Rightarrow p(3)$: 참

$p(2)$ 또는 $p(3)$: 참 $\Rightarrow p(4)$: 참

이와 같이 계속하여 $n \neq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 은 참이 된다.

(ii) $p(1)$ 은 거짓, $p(2)$ 는 참이라 하면,

$p(1)$ 또는 $p(2)$: 참 $\Rightarrow p(3)$: 참

$p(2)$ 또는 $p(3)$: 참 $\Rightarrow p(4)$: 참

이와 같이 계속하여 $n \neq 1$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 은 참이 된다.

(iii) $p(1)$, $p(2)$ 가 모두 참이라 하면,

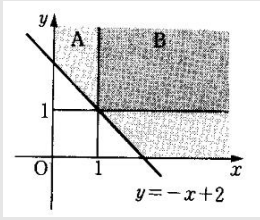
$p(3)$, $p(4)$, ...도 계속 참이다.

따라서, (i), (ii), (iii)에서 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되려면 $p(1)$, $p(2)$ 모두 참이어야 한다.

12. x, y 가 실수일 때, 다음 조건 중에서 조건 A 가 조건 B 이기 위한 필요충분조건인 것은? [배점 5, 상하]

- ① $A : x + y > 2$ $B : x > 1$ 이고 $y > 1$
 ② $A : |x| + |y| = 0$ $B : \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 0$
 ③ $A : x + y > 0$ 이고 $xy > 0$ $B : x > 0$ 이고 $y > 0$
 ④ $A : xy > x + y > 4$ $B : x > 2$ 이고 $y > 2$
 ⑤ $A : x + y > 2$ $B : x > 2$ 또는 $y > 1$

해설



- ① 그림에서 $A \overset{\times}{\subset} B$ 이다. 즉, $B \subset A$ 이므로 A 는 B 이기 위한 필요조건
- ② $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0, 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$ 을 만족시키는 x, y 는 $x = 0, y = 0$ 이외에도 $x = 8, y = -8, \dots$ 등이 있다. $\therefore A \overset{o}{\subset} B$ (충분조건)
- ③ A 는 x 축, y 축을 제외한 제1 사분면을 나타내므로 B 와 동치이다.
- ④ $A \overset{\times}{\subset} B$ 이다.(필요조건) (반례) $x = 4, y = \frac{3}{2}$ 이다. $xy > x + y > 4$ 이지만, $x > 2, y < 2$ 이다.
- ⑤ (충분조건) (반례) $x = 3, y = -4$ 는 B 를 만족시키지만 A 를 만족시키지 않는다. $\therefore A \overset{o}{\subset} B$

13. 다음 보기 중 두 조건 p, q 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것의 개수는?

- ㉠ $p: xy + 1 > x + y > 2 \quad q: x > 1, y > 1$
 ㉡ $p: x^2 > y^2 \quad q: |x| > |y|$
 ㉢ $p: |x| + |y| = 0 \quad q: x^2 + y^2 = 0$
 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 ㉤ $p: (A \cup B) \cap (B - A)^C = A \cup B, q: B \subset A$
 ㉥ $p: (A \cup B) - (A \cap B) = B, q: A - B = \phi$
 ㉦ $p: (A \cup B) - (A \cap B) = B, q: A^C = U$

[배점 5, 상하]

해설

㉠, ㉡, ㉢, ㉤, ㉥이 필요충분조건이다.

$$\text{㉠} : xy + 1 > x + y > 2 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) > 0 \Leftrightarrow x > 1, y > 1 \text{ 또는 } x < 1, y < 1$$

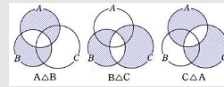
그런데 $x + y > 2$ 이므로 $x > 1, y > 1 \therefore p \Rightarrow q$ 이고 역도 성립한다.

$$\text{㉤} (A \cup B) - (A \cap B) = B \Leftrightarrow A = \phi$$

14. 집합 X, Y 에 대하여 $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ 라 하자. 집합 A, B, C 가 $n(A \cup B \cup C) = 90, n(A \Delta B) = 40, n(B \Delta C) = 36, n(C \Delta A) = 58$ 일 때, $n(A \cap B \cap C)$ 를 구하면? [배점 6, 상중]

- ① 15 ② 17 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

해설



$$\begin{aligned} & \text{위의 벤 다이어그램에서 } n(A \Delta B) + n(B \Delta C) + n(C \Delta A) = 2 \times \{n(A \cup B \cup C) - n(A \cap B \cap C)\} \\ & \therefore 40 + 36 + 58 = 2 \times \{90 - n(A \cap B \cap C)\} \\ & \therefore n(A \cap B \cap C) = 23 \end{aligned}$$

15. 학생 수가 50 명인 학급에서 생일을 조사하였을 때,
다음 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ 5 명 이상의 생일이 있는 달이 있다.
- ㉡ 모든 달에 생일이 있다.
- ㉢ 8 명 이상의 생일이 있는 요일이 있다.
- ㉣ 생일이 같은 학생이 존재한다.

[배점 6, 상중]

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉢, ㉣
- ④ ㉠, ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

㉠ 50명의 생일이 12달에 가장 골고루 퍼져 있을 때, $50 = 12 \times 4 + 2$ 이므로 매달 4 명씩 생일이 있고 나머지 2명은 어느 달인가에 추가되어야 하므로, 5 명 이상의 생일이 있는 달이 반드시 존재한다.

㉡ 50명 모두 특정한 달에는 생일이 있지 않을 수도 있으므로 거짓이다.

㉢ ㉠와 마찬가지로 생각해 보면, 50명의 생일이 일곱 요일에 가장 골고루 퍼져 있을 때는 $50 = 7 \times 7 + 1$ 이므로 어느 요일인가에 8명의 생일이 있다. 따라서, 참이다.

㉣ 어느 특정한 날에 생일이 같은 학생은 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있다.

그러므로 위의 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣ 중에서 항상 맞는 것은 ㉠와 ㉢이다.