

단원 종합 평가

1. 다음 표는 혜교의 지난 중간고사와 기말고사 시험과목 일부와 그 점수이다. 다음 중 집합인 것을 모두 고르면? (정답 3 개)

과목	중간	기말
국어	80	85
수학	90	80
영어	85	100
과학	70	55
사회	95	80
미술	100	95
음악	95	100
체육	75	65
도덕	100	85
한문	55	70

[배점 3, 중하]

- ① 지난 중간고사 점수가 80 점 이상인 과목
- ② 지난 기말고사 점수 중 지난 중간고사 점수보다 높은 과목
- ③ 기말고사 때 잘 본 과목
- ④ 기말고사 때 가장 못 본 과목
- ⑤ 중간고사와 기말고사의 평균이 좋은 과목

해설

- ③ ‘잘’이라는 단어의 기준이 명확하지 않아서 집합이 아니다.
- ④ ‘못 본’이라는 단어의 기준은 명확하지 않으나, ‘가장’이라는 단어가 있기 때문에 그 기준이 확실하다. 따라서 집합이다.
- ⑤ ‘좋은’이라는 단어의 기준이 명확하지 않아서 집합이 아니다.

2. 다음 중 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ 의 부분집합을 모두 골라라.

- | | |
|---------------|--------------------|
| ㉠ $\{1\}$ | ㉡ $\{1, 4\}$ |
| ㉢ $\{4, 10\}$ | ㉣ $\{4, 8\}$ |
| ㉤ $\{8, 10\}$ | ㉥ $\{1, 2, 4, 8\}$ |

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: ㉠

▶ 정답: ㉡

▶ 정답: ㉣

▶ 정답: ㉥

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면

$A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이고, 부분집합을 구하면

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{8\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 8\}, \{2, 4\}, \{2, 8\}, \{4, 8\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 8\}, \{2, 4, 8\}, \{1, 4, 8\}, \{1, 2, 4, 8\}$ 이다.

따라서 $10 \notin A$ 이므로 부분집합은 ㉠, ㉡, ㉣, ㉥이다.

3. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 나머지와 다른 하나는?

[배점 3, 중하]

- ① $A - B$ ② $A - (A \cap B)$
 ③ $A \cap B^c$ ④ $(A \cup B) - B$
 ⑤ $U - (A \cup B)^c$

해설

- ① $A - B = \phi$
 ② $A - (A \cap B) = A - A = \phi$
 ③ $A \cap B^c = A - B = \phi$
 ④ $(A \cup B) - B = B - B = \phi$
 ⑤ $U - (A \cup B)^c = U - B^c = B$

4. $U = \{x|x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 4, 5\}, B = \{2, 3, 5\}$ 일 때, $\{(A - B) \cup A\} \cap B^c$ 은?
 [배점 4, 중중]

- ① $\{1\}$ ② $\{4\}$ ③ $\{1, 4\}$
 ④ $\{2, 5\}$ ⑤ $\{1, 4, 5\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A - B = \{1, 4\}$ 이므로
 $\{(A - B) \cup A\} \cap B^c = \{\{1, 4\} \cup A\} - B = \{1, 2, 4, 5\} - \{2, 3, 5\} = \{1, 4\}$ 이다.

5. 우리 반 학생 36명 중 개를 키우는 학생은 15명, 고양이 키우는 학생은 18명이다. 개만 키우는 학생이 8명일 때, 개도 고양이도 키우지 않는 학생의 수를 구하여라.
 [배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 10명

해설

우리 반 학생의 집합을 U , 개를 키우는 학생의 집합을 A , 고양이를 키우는 학생의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 36, n(A) = 15, n(B) = 18$
 $n(A - B) = 8$
 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ 이므로
 $8 = 15 - n(A \cap B), n(A \cap B) = 7$
 $n(A \cup B)$
 $= n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 18 - 7 = 26$
 $n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 36 - 26 = 10$

6. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \times B$ 를 $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ 라고 정의한다.
 $n(A \cup B) = 8, n(A \cap B) = 4$ 일 때, $n(A) \times n(B)$ 의 최댓값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 36

해설

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A) + n(B) = 12$$

따라서 A, B 의 원소의 개수는 각각 최대 6 개씩 들어가야 한다.

따라서, $n(A) \times n(B)$ 의 최댓값은 $6 \times 6 = 36$ 이다.

7. 다음 중 무한집합인 것을 모두 고르면? (정답 2 개)
[배점 5, 중상]

① $A = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 100\}$

② $B = \{x \mid x \text{ 는 } 1 \text{ 보다 작은 분수}\}$

③ $C = \{x \mid x \text{ 는 } 3 \text{ 의 배수인 짝수}\}$

④ $D = \{x \mid x \text{ 는 } 2 \times n, n \text{ 은 } 10 \text{ 보다 작은 자연수}\}$

⑤ $E = \left\{x \mid x \text{ 는 } \frac{100}{x} \text{ 을 자연수로 만드는 자연수}\right\}$

해설

① $A = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 100\}$ 이므로 유한 집합이다.

② $B = \{x \mid x \text{ 는 } 1 \text{ 보다 작은 분수}\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ 이므로 무한집합이다.

③ $C = \{x \mid x \text{ 는 } 3 \text{ 의 배수인 짝수}\} = \{6, 12, \dots\}$ 이므로 무한집합이다.

④ $D = \{x \mid x \text{ 는 } 2 \times n, n \text{ 은 } 10 \text{ 보다 작은 자연수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 18\}$ 이므로 유한집합이다.

⑤ $E = \left\{x \mid x \text{ 는 } \frac{100}{x} \text{ 을 자연수로 만드는 자연수}\right\} = \{1, 2, 4, 5, 20, 25, 50, 100\}$ 이므로 유한집합이다.

8. 두 집합 $A = \{1, 2, \{3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$, $B = \{0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.
[배점 5, 중상]

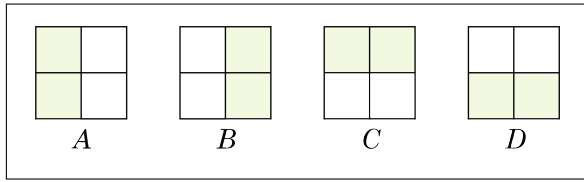
▶ 답 :

▶ 정답 : 1

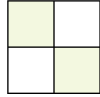
해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다.
따라서 $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ 이고, $n(A) - n(B) = 1$ 이다.

9. 다음 그림은 각각의 집합을 도형으로 나타낸 것이다.



다음 그림을 위의 집합 A, B, C, D 와 연산 기호를 사용하여 옳게 표현한 것은?



[배점 5, 중상]

- ① $(A \cup B) - (A \cap B)$
- ② $(D \cup C) - (B \cap C)$
- ③ $(A \cup D) - (A \cap D)$
- ④ $(A - C) \cup (C - B)$
- ⑤ $(A - D) \cup (B - A)$

해설

$$(A \cup D) - (A \cap D)$$

10. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

[배점 5, 중상]

- ① $A \cap B \neq B \cap A$
- ② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = A$
- ③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$
- ④ $n(A \cap B \cap \emptyset) = 0$
- ⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

- ① $A \cap B = B \cap A$
- ② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$
- ③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$
- ⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

11. 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

[배점 5, 중상]

- ① $A \cap B = A$ 이면 $n(A) < n(B)$
- ② $A \cap B = \emptyset$ 이면 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- ③ $A - B = \emptyset$ 이면 $A = B$
- ④ $A \cup B = B$ 이면 $B - A = \emptyset$
- ⑤ $A \cap B^c = A$ 이면 $n(A \cap B) = 0$

해설

- ① $A \cap B = A$ 이면 $n(A) \leq n(B)$
- ③ $A - B = \emptyset$ 이면 $A \subset B$
- ④ $A \cup B = B$ 이면 $A \subset B$ 이므로 $A - B = \emptyset$

12. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 세 개인 부분집합에 들어 있는 모든 원소들의 합을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 90

해설

집합 A 의 부분집합 중에서 원소가 3개인 부분집합은

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\},$
 $\{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\},$
 $\{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$ 의 10개이고,
 이 부분집합들에는 집합 A 의 원소가 6개씩 들어
 있으므로, $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 6 = 90$ 이 된다.

13. 전체 집합 $U = \{x \mid x \text{는 한 자리의 자연수}\}$
 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A =$
 $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}, n(A \cap B) = 0, n(A \cup B) = 9$
 일 때, 집합 $B - A$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{2, 4, 6, 8\}$

해설

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$n(U) = 9, n(A \cup B) = 9 \text{ 이므로}$$

$$A \cup B = U \dots \textcircled{1}$$

$$n(A \cap B) = 0 \text{ 이므로 } A \cap B = \emptyset \dots \textcircled{2}$$

① 과 ② 에 의하여

$$B = A^c = \{2, 4, 6, 8\}$$

14. 두 집합 $A = \{4, 3a, \frac{3}{a} + 1\}, B =$
 $\{a, a + 1, 4a - 3\}$ 에 대하여 $A - B = \{2\}$ 일
 때, A 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$A - B = \{2\}$ 이므로 2는 A 의 원소이다.

$$(i) 3a = 2 \text{ 이면 } a = \frac{2}{3}$$

$$A = \{\frac{11}{9}, 2, 4\}, B = \{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\}$$

$A - B = A$ 이므로 문제의 조건과 맞지 않는다.

$$(ii) \frac{a}{3} + 1 = 2 \text{ 이면 } a = 3$$

$$A = \{2, 4, 9\}, B = \{3, 4, 9\}$$

$A - B = \{2\}$ 이므로 문제의 조건에 적합

$$\therefore a = 3$$

15. 집합 $S = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\}$ 의 공집합이 아닌
 부분집합 A 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합 A
 의 개수를 구하여라.

$$\bullet x \in A \text{ 이면 } \frac{1}{x} \in A$$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 15개

해설

주어진 집합은 원소의 역수가 반드시 A 의 원소가 되어야 하는 조건을 가진다.

$\left(\frac{1}{4}, 4\right), \left(\frac{1}{3}, 3\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (1, 1)$ 은 역수 관계에 있는 두 수의 쌍이다.

(1) 원소의 개수가 1개인 집합 : $\{1\} \Rightarrow 1$ 개

(2) 원소의 개수가 2개인 집합 :
 $\left\{\frac{1}{4}, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 2\right\} \Rightarrow 3$ 개

(3) 원소의 개수가 3개인 집합 :
 $\left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 1, 3\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\} \Rightarrow 3$ 개

(4) 원소의 개수가 4개인 집합 :
 $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3\right\} \Rightarrow 3$ 개

(5) 원소의 개수가 5개인 집합 :
 $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\} \Rightarrow 3$ 개

(6) 원소의 개수가 6개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3, 4\right\} \Rightarrow 1$ 개

(7) 원소의 개수가 7개인 집합 :
 $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\} \Rightarrow 1$ 개

따라서 집합 A 의 개수는 $1+3+3+3+3+1+1=15$ (개)