

확인학습문제

1. 다음은 희망이의 수학일기 중 일부이다. 밑줄 친 부분 중 틀린 부분을 말하여라.

오늘은 수학시간에 수의 약수의 개수를 구할 때, 직접 그 수의 약수를 모두 구하지 않고도 소인수분해만을 이용하여 약수의 개수를 구하는 방법을 배웠다. 소인수분해만 구하면 약수의 개수를 구할 수 있다니! 정말 신기하다!! 그럼 오늘 배운 내용을 복습해 볼까.

문제) 98 의 약수의 개수 구하기

풀이) ① 먼저 98 을 소인수분해하면 $98 = 2 \times 7^2$ 이다.

② 약수의 개수를 구할 때는, 각 지수에 1 을 더하여 곱한다.

③ 따라서 98 의 약수의 개수는 $(0+1) \times (2+1) = 3$ (개) 이다.

[배점 2, 하중]

▶ 답:

▷ 정답: ③

▷ 정답: ③

해설

③ 98 을 소인수분해하면 $98 = 2 \times 7^2$ 이다. 한편 2와 7^2 의 지수는 각각 1, 2 이므로 98 의 약수의 개수는

$(1+1) \times (2+1) = 6$ (개) 이다.

2. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 부분집합,

$A = \{x | x \text{는 약수의 개수가 } 3 \text{개 이상인 자연수}\}$ 일 때, $n(A^c)$ 을 구하여라. [배점 2, 하중]

▶ 답:

▷ 정답: 5

▷ 정답: 5

해설

A^c 는 10 이하의 자연수 중에서 약수의 개수가 3 개 미만인 자연수의 집합이므로, 1 과 10 이하의 소수들의 모임과 같다.

$A^c = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$\therefore n(A^c) = 5$

3. $3^a \times 5^b$ 이 $3^3 \times 5$ 를 약수로 가질 때, 두 자연수 a, b 의 최솟값의 합을 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 4

▷ 정답: 4

해설

$3^a \times 5^b$ 이 $3^3 \times 5$ 를 약수로 가지므로, a 는 3 이상의 자연수, b 는 1 이상의 자연수가 되어야 한다.

그 중 최솟값은 $a = 3, b = 1$ 일 때이다.

$\therefore a + b = 3 + 1 = 4$

4. $2^4 \times 3^2 \times 5$ 의 약수 중에서 두 번째로 큰 수는?
[배점 3, 하상]

- ① $2^3 \times 3^2 \times 5$ ② $2^3 \times 3^2$
③ $2^4 \times 3^2 \times 5$ ④ $2^4 \times 3 \times 5$
⑤ $2^4 \times 5$

해설

제일 큰 약수는 자기 자신인 $2^4 \times 3^2 \times 5$ 이고, 두 번째로 큰 수는 가장 작은 소인수인 2 가 한번 덜 곱해진 것이므로, $2^{4-1} \times 3^2 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 이다.

5. 720 의 약수가 아닌 것은? [배점 3, 하상]

- ① $2^3 \times 3 \times 5$ ② 2×5
③ $3^2 \times 5$ ④ $2^4 \times 3^3$
⑤ 2×3^2

해설

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ 이므로 720 의 약수는 (2^4 의 약수) $\times$ (3^2 의 약수) $\times$ (5 의 약수) 이다.

6. 다음 중 63 의 약수가 아닌 것을 고르면?
[배점 3, 하상]

- ① 1 ② 3^2 ③ 7
④ 3×7 ⑤ 7^2

해설

$$63 = 3^2 \times 7$$

7. 60 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수는?
[배점 3, 하상]

- ① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 20

해설

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

곱해야할 가장 작은 자연수는

$$3 \times 5 = 15$$

8. 다음 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차를 구하면?

$$2 \times 3^2, 5^3, 2^3 \times 5, 3^2 \times 7$$

[배점 3, 하상]

- ① 22 ② 23 ③ 45
④ 107 ⑤ 143

해설

$$2 \times 3^2 = 2 \times 3 \times 3 = 18$$

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

$$2^3 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$$

$$3^2 \times 7 = 3 \times 3 \times 7 = 63 \text{ 이므로}$$

가장 큰 수는 5^3 , 가장 작은 수는 2×3^2

따라서 두 수의 차는 $125 - 18 = 107$ 이다.

9. 자연수 a, b 에 대하여 $2^2 \times 5 \times a = b^2$ 을 만족하는 b 의 최솟값을 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

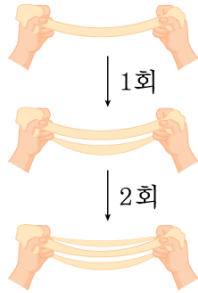
▶ 정답: 10

▶ 정답: 10

해설

$2^2 \times 5 \times a = b^2$ 을 만족하려면 $2^2 \times 5 \times a$ 를 소인수분해했을 때 각 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서 만족하는 자연수 b 의 최솟값은 $a = 5$ 일 때 $2 \times 5 = 10$ 이다.

10. 손으로 국수를 만들 때, 반죽을 늘여 1회 접으면 두 가닥이 되고, 2회 접으면 네 가닥이 된다. 국수가 100가닥 이상 필요할 때, 최소 몇 회를 접어야 하는가?



[배점 3, 중하]

- ① 4 회 ② 5 회 ③ 6 회
④ 7 회 ⑤ 8 회

해설

반죽을 1회 접으면 2가닥, 2회 접으면 (2×2) 가닥, 3회 접으면 $(2 \times 2 \times 2)$ 가닥이 된다. 접는 횟수에 따른 국수의 가닥 수를 표로 정리하면 다음과 같다.

접는 횟수	국수의 가닥 수 (가닥)	국수의 가닥 수를 거듭제곱으로 표현
1회	2	2^1
2회	$2 \times 2 = 4$	2^2
3회	$2 \times 2 \times 2 = 8$	2^3
4회	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	2^4
5회	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$	2^5
⋮	⋮	⋮

$2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, ... 이므로 국수 100가닥을 만들려면 7회 이상 접어야 한다.

11. $2^a = 64$, $3^b = 81$, $5^3 = c$ 를 만족하는 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $c - a - b$ 의 값을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 정답: 115

▶ 정답: 115

해설

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

⋮

$$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$$

이므로 $a = 6$ 이다.

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

이므로 $b = 4$ 이다.

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ 이므로 } c = 125 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } c - a - b = 125 - 6 - 4 = 115 \text{ 이다.}$$

12. $2^3 \times \square$ 의 약수의 개수가 8 개일 때, 다음 중 $\square$ 안에 들어 갈 수 없는 수를 모두 고르면?

[배점 3, 중하]

- ① 3 ② 4 ③ 7 ④ 9 ⑤ 16

해설

② $2^3 \times 4 = 2^3 \times 2^2 = 2^5$ 이므로 약수의 개수는 $5 + 1 = 6$ (개)이다.

④ $2^3 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ 이므로 약수의 개수는 $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개)이다.

13. 다음 중 약수의 개수가 가장 적은 것은?

[배점 3, 중하]

- ① $19^3 \times 31$ ② 2×5^4
 ③ $3^2 \times 7 \times 11$ ④ $3^2 \times 11^2 \times 13$
 ⑤ 19^9

해설

각각의 약수의 개수를 구하면 다음과 같다.

- ① $(3 + 1) \times (1 + 1) = 8$ (개)
 ② $(1 + 1) \times (4 + 1) = 10$ (개)
 ③ $(2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 12$ (개)
 ④ $(2 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 18$ (개)
 ⑤ $9 + 1 = 10$ (개)

14. 다음 중 약수의 개수가 가장 많은 것은?

[배점 3, 중하]

- ① 200 ② 2×5^3
 ③ $3^2 \times 7^2$ ④ 150
 ⑤ $3^2 \times 11^2 \times 13$

해설

각각의 약수의 개수를 구하면 다음과 같다.

- ① $200 = 2^3 \times 5^2$ 이므로 $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개)이다.
 ② $(1 + 1) \times (3 + 1) = 8$ (개)
 ③ $(2 + 1) \times (2 + 1) = 9$ (개)
 ④ $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ 이므로 $(1 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개)이다.
 ⑤ $(2 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 18$ (개)

15. 600 을 자연수 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 나누어야 할 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 6

▶ 정답 : 6

해설

600 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)600} \\ 2 \overline{)300} \\ 2 \overline{)150} \\ 3 \overline{)75} \\ 5 \overline{)25} \\ 5 \end{array}$$

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ 이므로 $\frac{2^3 \times 3 \times 5^2}{x}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 x 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 $2 \times 3 = 6$ 이다.

16. $\frac{252}{A} = B^2$ 을 만족하는 자연수 A, B 에 대하여 B 의 최댓값은? [배점 3, 중하]

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 8 ⑤ 14

해설

252 를 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)252} \\ 2 \overline{)126} \\ 3 \overline{)63} \\ 3 \overline{)21} \\ 7 \end{array}$$

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ 이므로 $\frac{2^2 \times 3^2 \times 7}{A} = B^2$ 을 만족하는 B 의 값 중에서 가장 큰 자연수는 A = 7 일 때 $2 \times 3 = 6$ 이다.

17. 자연수 x, y 에 대하여 $\frac{2^2 \times 5}{x} = y^2$ 을 만족하는 x 의 집합을 원소나열법으로 나타내면? [배점 3, 중하]

① {1, 4} ② {4, 5}
③ {5, 20} ④ {4, 5, 20}
⑤ {1, 2, 4, 5, 20}

해설

$\frac{2^2 \times 5}{x} = y^2$ 을 만족하는 자연수 x 는 $5, 5 \times 2^2$ 이다.

18. 7200 을 소인수분해 했을 때, 소인수들의 곱은? [배점 4, 중중]

① 18 ② 30 ③ 45 ④ 60 ⑤ 72

해설

$$\begin{aligned} 7200 &= 2^5 \times 3^2 \times 5^2 \\ \therefore 2 \times 3 \times 5 &= 30 \end{aligned}$$

19. 1 부터 50 사이의 수 중에서 약수의 개수가 3 개인 수는 모두 몇 개인지 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 4 개

▶ 정답 : 4 개

해설

약수의 개수가 3 개인 수는 (소수)² 이므로
50 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는 $2^2, 3^2,$
 $5^2, 7^2$ 의 4 개

20. 882 의 약수의 개수와 $2 \times 5^x \times 7^2$ 의 약수의 개수가
같을 때, 자연수 x 의 값은 ? [배점 4, 중중]

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$ 의 약수의 개수가 $2 \times 5^x \times 7^2$
의 약수의 개수와 같으므로
 $(1+1)(2+1)(2+1) = (1+1)(x+1)(2+1) = 18$
 $\therefore x = 2$

21. 다음 중 소인수분해 한 것으로 옳지 않은 것은?
[배점 4, 중중]

- ① $124 = 2^2 \times 31$ ② $54 = 2 \times 3^3$
③ $72 = 2^3 \times 3^3$ ④ $196 = 2^2 \times 7^2$
⑤ $150 = 2 \times 3 \times 5^2$

해설

③ $2^3 \times 3^2$

22. 다음 중 약수의 개수가 가장 큰 것을 고르면?

[배점 4, 중중]

- ① $2^4 \times 3^2$ ② $2 \times 5 \times 7$
③ $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ④ $2^2 \times 3^3 \times 7$
⑤ $11^2 \times 13^2$

해설

① 15 개 ② 8 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 9 개

23. 다음 1 보다 큰 자연수 중에서 1 과 그 수 자신만을 약
수로 가지는 수는? [배점 4, 중중]

- ① 8 ② 22 ③ 26
④ 100 ⑤ 103

해설

1 보다 큰 자연수 중에서 1 과 그 수 자신만을 약
수로 가지는 수는 소수이다.
따라서 소수인 것은 103 이다.

24. 다음 중 거듭제곱의 표현으로 옳은 것은?

[배점 4, 중중]

① $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4^2$

② $6 \times 6 = 2^6$

③ $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 6^3$

④ $5 + 5 + 5 + 5 = 4^5$

⑤ $\frac{3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4} = \frac{3^3}{4^3}$

해설

① $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

② $6 \times 6 = 6^2$

③ $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3$

④ $5 + 5 + 5 + 5 = 20$

25. 자연수 a 에 대하여 $P(a)$ 는 a 의 약수의 개수를 나타낸다고 할 때, 소인수분해를 이용하여 $P(P(525))$ 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 6

▶ 정답 : 6

해설

$525 = 3 \times 5^2 \times 7$ 이므로

$P(525) = (1+1) \times (2+1) \times (1+1) = 12$,

$12 = 2^2 \times 3$ 이므로

$P(P(525)) = P(12) = (2+1) \times (1+1) = 6$

26. 504 의 약수의 개수와 $3^x \times 7^2 \times 13^y$ 의 약수의 개수가 같다고 한다. 이때, $x - y$ 의 값을 구하여라. (단, x, y 는 $x > y$ 인 자연수)

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 2

▶ 정답 : 2

해설

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ 이므로 약수의 개수가 같기 위해서는 $x = 3, y = 1$ 이어야 한다. ($\because x > y$)

$\therefore x - y = 3 - 1 = 2$

27. 서로 다른 한 자리 소수 a, b, c 에 대하여 $a^2 \times 3^2 \times 5^2$ 으로 소인수분해되는 자연수 N 에 8을 곱하였더니 약수의 개수가 2배가 되었다. 이때, a 의 값은?

[배점 5, 중상]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

a 는 한 자리 소수 중 하나이므로 2 또는 7이다.

$a^2 \times 3^2 \times 5^2$ 의 약수의 개수는 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 이다.

$a = 2$ 일 때 2^3 을 곱하면 약수의 개수는

$6 \times 3 \times 3 = 54$ 이므로 $a = 2$ 이다.

28. 588 을 588 보다 작은 자연수 a 로 나누었더니 약수의 개수가 홀수인 자연수 b 가 되었다. 가능한 b 의 값의 합을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 250

▶ 정답 : 250

해설

약수의 개수가 홀수인 수는 제곱수이므로
 $\frac{588}{a} = \frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{a} = k^2 = b$ 라 하면,
 a 는 $3, 2^2 \times 3, 2^2 \times 3 \times 7^2$ 이 가능하다.
 $a = 3$ 일 때, $b = 14^2 = 196$
 $a = 2^2 \times 3$ 일 때, $b = 7^2 = 49$
 $a = 3 \times 7^2$ 일 때, $b = 2^2 = 4$
 $a = 2^2 \times 3 \times 7^2$ 일 때, $b = 1^2 = 1$
 $\therefore 196 + 49 + 4 + 1 = 250$

29. 두 자연수 a, b 에 대하여 $2 \times 5^a \times 11^b$ 의 약수가 12 개일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

▶ 정답 : 3

해설

$(1+1) \times (a+1) \times (b+1) = 12$
 $(a+1) \times (b+1) = 6$
 $a+1 = 2, b+1 = 3$ 또는 $a+1 = 3, b+1 = 2$
 $a = 1, b = 2$ 또는 $a = 2, b = 1$
 $\therefore a + b = 1 + 2 = 3$

30. 120 에 자연수 x 를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 다음 중 x 의 값이 될 수 없는 것은? [배점 5, 중상]

① $2 \times 3 \times 5$

② $2^3 \times 3 \times 5$

③ $2 \times 3^3 \times 5$

④ $2 \times 3 \times 5 \times 7^2$

⑤ $2^2 \times 3 \times 5$

해설

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 으로 소인수분해되므로 인수 2, 3, 5는 홀수의 지수를 곱한다.
 $2^2 \times 3 \times 5$ 은 2^2 을 곱하였으므로 제곱수가 될 수 없다.

31. 자연수 $360 \times n$ 이 자연수의 제곱이 된다고 할 때, n 이 될 수 있는 것을 모두 구하시오.(단, n 은 160 미만의 자연수이다.) [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : 10

▶ 정답 : 40

▶ 정답 : 90

▶ 정답 : 10

▶ 정답 : 40

▶ 정답 : 90

해설

$$360 \times n = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times n = m^2 \text{ 이라 하면}$$

$$\text{가장 작은 수는 } n = 2 \times 5$$

따라서 n 이 될 수 있는 160 미만의 수는

$$2 \times 5 = 10$$

$$2 \times 5 \times 2^2 = 40$$

$$2 \times 5 \times 3^2 = 90$$

$$\therefore 10, 40, 90$$

32. $n = 4p^2q^3$ 일 때, n 의 약수의 개수를 구하여라. (단, $p \neq q \neq 2$ 인 소수) [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 36 개

▷ 정답: 36 개

해설

n 을 소인수분해하면 $n = 4p^2q^3 = 2^2 \times p^2 \times q^3$ 이다.

따라서 약수의 개수는 $(2+1) \times (2+1) \times (3+1) = 36$ (개) 이다.

33. $\frac{n}{2}$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{3}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 432

▷ 정답: 432

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $\frac{n}{2}$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 네 번 곱해져 있고, $\frac{n}{3}$ 이 제곱이므로 n 은 3 이 세 번 곱해져 있다.

$$\therefore n = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 432$$

34. 48 에 어떤 수 x 를 곱하여 자연수의 제곱이 되도록 하려 한다. 이러한 x 중 두 번째로 작은 수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 12

▷ 정답: 12

해설

$$48 = 2^4 \times 3 \text{ 이므로}$$

$$\text{가장 작은 } x = 3$$

$$\text{두 번째로 작은 수는 } 2^2 \times 3 = 12$$

35. 일곱 자리 수 $a132784$ 가 7 의 배수이고, 네 자리 수 $b8c1$ 이 11 의 배수일 때, $a + b + c$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 15

▷ 정답: 15

해설

7의 배수 : 뒤에서부터 세 자리씩 끊어서 더하고
뺀 수가 0 이거나 7의 배수인 수이므로,

$a - 132 + 784 = 7k \rightarrow 652 + a = 7k$ 이므로 $a = 6$
이다.

11의 배수 : 짝수 자리 수의 합에서 홀수 자리 수의
합을 뺀 절댓값이 0 이거나 11의 배수이므로,

$b + c - 9 = 11n \rightarrow b + c = 9$ 이다.

$\therefore a + b + c = 15$