문제 풀이 과제

1. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라. [배점 2, 하하]

① $a^6 \div a^2 = a^4$ ② $b^3 \div b = b^2$

③ $a^6 \div a^3 = a^2$ ④ $a^{15} \div a^8 = a^7$

⑤ $x^5 \div x^3 = x^2$

해설

① $a^6 \div a^2 = a^{6-2} = a^4$

② $b^3 \div b = b^{3-1} = b^2$

③ $a^6 \div a^3 = a^{6-3} = a^3$

④ $a^{15} \div a^8 = a^{15-8} = a^7$

⑤ $x^5 \div x^3 = x^{5-3} = x^2$

2. 다음 □ 안에 들어갈 알맞은 수를 차례로 나열한 것은?

$$\left(\frac{2}{a}\right)^3 \times \left(\frac{3a}{b}\right)^2 = \frac{8}{a^{\square}} \times \frac{9a^{\square}}{b^2} = \frac{72}{a^{\square}b^{\square}}$$

[배점 2, 하하]

① 3 , 2 , 1 , 3 ② 3 , 2 , 1 , 2

③ 3 , 2 , 2 , 2 ④ 4 , 2 , 1 , 2

⑤ 4 , 1 , 1 , 2

해설

$$\left(\frac{2}{a}\right)^3 \times \left(\frac{3a}{b}\right)^2 = \frac{8}{a^3} \times \frac{9a^2}{b^2} = \frac{72}{ab^2}$$

3. $2^{2x} \times 8^x = 4^2 \times 2^x$ 를 만족하는 x 의 값은? [배점 2, 하하]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2^{2x} \times 2^{3x} = (2^2)^2 \times 2^x$

$2^{5x} = 2^{x+4}$

$x = 1$

4. $-xy^2 \times (-2x^2y)^3 \times 4x^4y^3 = Ax^By^C$ 일 때, $A-B+C$ 의 값을 구하여라. [배점 2, 하하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 29

▷ 정답 : 29

해설

$-xy^2 \times (-8x^6y^3) \times 4x^4y^3 = 32x^{11}y^8$

$A = 32$, $B = 11$, $C = 8$

$\therefore\ A - B + C = 29$

5. 다음은 $(xy^3)^2 \div (-y)^3$ 의 풀이 과정이라고 할 때, 처음 틀린 부분을 찾아라.

보기

㉠ $(xy^3)^2 \div (-y)^3 = x^2y^6 \div (-y)^3$

㉡ $x^2y^6 \div (-y)^3 = x^2y^6 \div y^3$

㉢ $x^2y^6 \div y^3 = \dfrac{x^2y^6}{y^3}$

㉣ $\dfrac{x^2y^6}{y^3} = x^2y^3$

[배점 2, 하하]

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

▷ 정답: ㉡

해설

$(xy^3)^2 \div (-y)^3 = x^2y^6 \div (-y)^3 = x^2y^6 \div (-y^3) = \dfrac{x^2y^6}{-y^3} = -x^2y^3$ 이다.
따라서 ㉡에서 $-y^3$ 이 $(-y^3)$ 으로 변환되어야 한다. ㉢, ㉣은 ㉡에서 잘못된 값을 계속 가지고 있지만 ㉢, ㉣ 식 자체만으로는 틀리지 않았다.

6. 다음 중 옳은 것을 고르면? [배점 2, 하중]

① $(-a^2)^2 \times (2b)^3 = -4a^4b^3$

② $(-3y)^2 \times (-xy)^3 = -3x^3y^5$

③ $(-xy)^2 \times 2xy = 2x^2y^2$

④ $\left(-\dfrac{1}{a}\right)^2 \times \left(\dfrac{2a}{b}\right)^3 = \dfrac{4}{b^3}$

⑤ $a^2 \times (-2b)^2 \times a^3 = 4a^5b^2$

해설

① $(-a^2)^2 \times (2b)^3 = 8a^4b^3$
② $(-3y)^2 \times (-xy)^3 = -9x^3y^5$
③ $(-xy)^2 \times 2xy = 2x^3y^3$
④ $\left(-\dfrac{1}{a}\right)^2 \times \left(\dfrac{2a}{b}\right)^3 = \dfrac{8a}{b^3}$

7. $18a^3b^3 \div 3a^2b \times 2b$ 를 간단히 하면? [배점 2, 하중]

① $3ab$ ② $6ab^2$ ③ $12ab^2$
④ $3ab^3$ ⑤ $12ab^3$

해설

$18a^3b^3 \times \dfrac{1}{3a^2b} \times 2b = 12ab^3$

8. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [배점 2, 하중]

① $a^8 \div a^4 = a^2$

② $a^2 \times a^3 = a^5$

③ $(a^5)^2 \div a^{10} = 1$

④ $(a^2)^4 \div (a^3)^4 = \dfrac{1}{a^4}$

⑤ $(a^2 \times a^6)^2 = a^{16}$

해설

① $a^8 \div a^4 = a^4$

9. 다음 계산 중 옳은 것을 모두 찾으면?

[배점 2, 하중]

① $a^3 \times a^7 = a^{10}$

② $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^8$

③ $(x^2)^2 \times (x^3)^2 = x^{10}$

④ $x^2 \times y^4 \times x^6 \times y^2 = x^8 y^6$

⑤ $(x^3)^2 \times x^2 \times (x^2)^2 = x^{11}$

해설

② $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^6$

⑤ $(x^3)^2 \times x^2 \times (x^2)^2 = x^{3\times 2} \times x^2 \times x^{2\times 2}$
$= x^{6+2+4} = x^{12}$

10. n 이 홀수 일 때,
$(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}$ 의 값을 구하여라.

[배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 2

▷ 정답: 2

해설

$2n$ 의 짝수, $2n+1$ 은 홀수이므로
$(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1} = 1 - (-1) = 2$

11. $(2x^A y)^2 \div 2x^4 y \times x^3 y^4 = Bx^5 y^C$ 일 때, $A + B - C$ 의 값은?

[배점 3, 하상]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\frac{4x^{2A} y^2 \times x^3 y^4}{2x^4 y} = 2x^{2A-1} y^5 = Bx^5 y^C$

$A = 3, B = 2, C = 5$ 따라서 $A + B - C = 0$ 이다.

12. $a^{10} \div (a^3)^x = (a^2)^2$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

[배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 2

▷ 정답: 2

해설

$a^{10} \div a^{3x} = a^4$ 이므로 $10 - 3x = 4$

$\therefore\ x = 2$

13. 다음 결과 중 옳은 것은? [배점 3, 중하]

① $a^2 \times a^4 = a^8$

② $(a^2)^3 \times (b^2)^2 = a^5b^4$

③ $(a^3)^2 \times a^2 \times (b^3)^2 = a^8b^6$

④ $(a^4)^2 \times (b^3)^2 \times b^2 = a^6b^7$

⑤ $2(a^2)^5 \times a^4 \times \frac{1}{2}b^3 = a^{11}b^3$

해설

① $a^2 \times a^4 = a^6$

② $(a^2)^3 \times (b^2)^2 = a^6b^4$

③ $(a^3)^2 \times a^2 \times (b^3)^2 = a^{6+2}b^6 = a^8b^6$

④ $(a^4)^2 \times (b^3)^2 \times b^2 = a^8b^{6+2} = a^8b^8$

⑤ $2(a^2)^5 \times a^4 \times \frac{1}{2}b^3 = a^{10+4}b^3 = a^{14}b^3$

14. 다음과 같이 6 개의 식이 있다. 다음 식들 중 계산 결과가 같은 것을 찾아라.

㉠ $\frac{b^2a}{27} \times \frac{ba^2}{3}$	㉡ $\frac{a}{3}\left(\frac{ba}{3}\right)^2$
㉢ $\left\{\frac{1}{3}(a^2b)^2\right\}^2$	㉣ $\left(\frac{ab}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3}$
㉤ $\frac{a}{9} \times \left(\frac{ab^2}{3}\right)^2$	㉥ $\frac{1}{a}\left(\frac{ab}{3}\right)^3$

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉠

해설

㉠ $\frac{b^2a}{27} \times \frac{ba^2}{3} = \frac{a^3b^3}{81}$

㉡ $\frac{a}{3}\left(\frac{ba}{3}\right)^2 = \frac{a^3b^2}{27}$

㉢ $\left(\frac{1}{3}a^4b^2\right)^2 = \frac{a^8b^4}{9}$

㉣ $\left(\frac{ab}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{a^3b^3}{81}$

㉤ $\frac{a}{9} \times \frac{a^2b^4}{9} = \frac{a^3b^4}{81}$

㉥ $\frac{1}{a}\left(\frac{ab}{3}\right)^3 = \frac{a^2b^3}{27}$

15. 다음 중 옳은 것을 고르면? [배점 3, 중하]

① $(-3x^3)^2 = -3x^5$

② $(-2^2x^4y)^3 = 32x^7y^3$

③ $(2a^2)^4 = 16a^6$

④ $\left(-\frac{a^2}{b^4}\right)^2 = \frac{a^4}{b^8}$

⑤ $\left(-\frac{3y^2}{x}\right)^3 = -\frac{27y^5}{x^4}$

해설

① $(-3x^3)^2 = (-3)^2x^6 = 9x^6$

② $(-2^2x^4y)^3 = (-2^2)^3x^{12}y^3 = -64x^{12}y^3$

③ $(2a^2)^4 = 16a^8$

④ $\left(-\frac{a^2}{b^4}\right)^2 = \frac{a^4}{b^8}$

⑤ $\left(-\frac{3y^2}{x}\right)^3 = -\frac{27y^6}{x^3}$

16. $3^{2x+1} = 27^{x-2}$ 이 성립할 때, x 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

▷ 정답 : 7

해설

$3^{2x+1} = (3^3)^{x-2}$, $2x+1 = 3(x-2)$ $\therefore x = 7$

17. $5^5 \div 5^a = 25$, $5^b + 5^b + 5^b + 5^b + 5^b = 5^4$ 일 때, $b-a$ 의 값은?

[배점 4, 중중]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$5^5 \div 5^a = 5^{5-a} = 5^2$

$5 - a = 2 \quad \therefore a = 3$

$5 \times 5^b = 5^4, 5^{b+1} = 5^4$

$b + 1 = 4 \quad \therefore b = 3$

$a = 3,\ b = 3$

$\therefore\ a - b = 0$

18. $(-5x^2y)^3$ 을 간단히 하면?

[배점 4, 중중]

① $125x^6y^3$ ② $-125x^6y^3$ ③ $-125x^3y^6$

④ $125x^3y^6$ ⑤ $-125x^3y^3$

해설

$(-5x^2y)^3 = (-5)^3x^6y^3 = -125x^6y^3$

19. 3^x 의 일의 자리의 숫자가 1, 3^y 의 일의 자리의 숫자가 3 일 때, $81^x \div 9^y$ 의 일의 자리의 숫자를 구하면? (단, x, y 는 $x > y$ 인 자연수)

[배점 5, 중상]

① 1 ② 3 ③ 9 ④ 7 ⑤ 2

해설

3^k (k 는 자연수)의 일의 자리는

$3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \cdots$

$\therefore\ x = 4k_1,\ y = 4k_2 - 3$

(단, $k_2 \le k_1$, k_1, k_2 는 자연수이다.)

$$\begin{aligned} 81^x \div 9^y &= 3^{4x-2y} \\ &= 3^{16k_1-8k_2+6} \\ &= 3^{2(8k_1-4k_2+3)} \\ &= 9^{8k_1-4k_2+3} \end{aligned}$$

9^k (k 는 자연수)의 일의 자리는 $9, 1, 9, 1, \cdots$

k_1, k_2 가 자연수이므로 $8k_1$, $4k_2$ 는 짝수이다.

따라서 $8k_1 - 4k_2 + 3$ 은 홀수이므로

$81^x \div 9^y$ 의 일의 자리는 9 이다.

20. $2^{17} \times 5^{20}$ 은 n 자리의 자연수이고, 3^{2008} 의 일의 자리의 숫자는 m 일 때, $n + m$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

▷ 정답 : 21

해설

$2^{17} \times 5^{20} = (2^{17} \times 5^{17}) \times 5^3 = 125 \times 10^{17}$

$\therefore\ n = 20$

3^m 의 일의 자리의 수는 3, 9, 7, 1 로 반복되고

$2008 = 4 \times 502$ 이므로 $m = 1$

$\therefore\ n + m = 21$

21. x, y 가 짝수일 때, $(-4)^3 \div (-2)^y = (-2)^{x-6}$ 이다. $x + y$ 의 값을 구하면? [배점 5, 중상]

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 12

해설

$(-2^2)^3 \div (-2)^y = (-2)^{6-y} = (-2)^{x-6}$

$6 - y = x - 6$

$\therefore\ x + y = 12$

22. $(-3x^2y)^2 \div \dfrac{3x^2y^4}{2y^2} - 2x^3y^2 \times \dfrac{1}{xy^2}$ 의 값은? [배점 5, 상하]

① $3xy^3$ ② $-3x^3y$ ③ $-4x^2$

④ $4x^2$ ⑤ $4x^2y$

해설

$(-3x^2y)^2 \div \dfrac{3x^2y^4}{2y^2} - 2x^3y^2 \times \dfrac{1}{xy^2}$

$= 9x^4y^2 \times \dfrac{2y^2}{3x^2y^4} - 2x^3y^2 \times \dfrac{1}{xy^2}$

$= 6x^2 - 2x^2 = 4x^2$

23. n 이 자연수일 때, $(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \cdots + (-1)^{2n-1}$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: -1

▷ 정답: -1

해설

(준식) $= (-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots(-1+1) - 1 = -1$

24. $3^{2000} \le n^{2000} \le A^{1000}$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 모두 4 개일 때, A 의 최솟값을 구하여라. (단, A 는 자연수) [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 36

▷ 정답: 36

해설

각 항의 지수를 통일하면

$3^{2000} \le n^{2000} \le A^{1000}$

$(3^2)^{1000} \le (n^2)^{1000} \le A^{1000}$

따라서 $3^2 \le n^2 \le A$ 를 만족하는 자연수 n 의 값이 4 개이므로

순서대로 $n = 3, 4, 5, 6$ 이다.

$\therefore 6^2 \le A < 7^2$ 에서 A의 최솟값은 36

25. $2^{60}, 3^{40}, 4^{30}, 5^{24}$ 중 가장 큰 수를 M , 가장 작은 수를 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값의 일의 자리 숫자를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : 5

해설

$2^{60}, 3^{40}, 4^{30}$ 에서 세 지수의 최대공약수가 10 이므로

$2^{60} = (2^6)^{10} = 64^{10}$, $3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$,

$4^{30} = (4^3)^{10} = 64^{10}$

$2^{60} = 4^{30} < 3^{40}$

$2^{60}, 5^{24}$ 에서 두 지수의 최대공약수가 12 이므로

$2^{60} = (2^5)^{12} = 32^{12}$, $5^{24} = (5^2)^{12} = 25^{12}$

$25^{12} < 2^{60} = 4^{30} < 3^{40}$

따라서 3^n 의 일의 자리 숫자는 $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$ 일 때, $3, 9, 7, 1$ 을 반복하므로

3^{40} 의 일의 자리 숫자는 1

5^n 의 일의 자리 숫자는 n 의 값에 상관없이 항상 5 이다.

5^{24} 의 일의 자리 숫자는 5

따라서 $M \times m$ 의 값의 일의 자리 숫자는 5 이다.

26. 임의의 자연수 a, b 에 대하여 $x^a y^b = (3^{-1})^{b-a}$ 와 $x^b y^a = (3^{-1})^{a-b}$ 일 때, xy 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 1

해설

$x^a y^b = (3^{-1})^{b-a} \cdots$ ㉠

$x^b y^a = (3^{-1})^{a-b} \cdots$ ㉡ 이라 할 때

두 식을 좌변끼리 우변끼리 각각 곱하면

$$(3^{-1})^{b-a} \times (3^{-1})^{a-b} = (\frac{1}{3})^{b-a} \times (\frac{1}{3})^{a-b}$$
$$= (\frac{1}{3})^{b-a+a-b}$$
$$= (\frac{1}{3})^0$$
$$= 1$$

$$x^a y^b \times x^b y^a = x^{a+b} \times y^{a+b}$$
$$= (xy)^{a+b}$$

$a + b$가 자연수 이므로 $(xy)^{a+b} = 1$을 만족하는 xy는 1이다.

27. 유진이는 10000 원으로 현미 ag 을 사거나 율무 bg 을 사려고 한다. 현미와 율무를 같은 무게의 비로 섞어서 만든 현미율무는 10000 원에 몇 g 을 살 수 있는 지 a, b 를 사용하여 나타내어라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2ab}{a+b}$ g

▷ 정답 : $\frac{2ab}{a+b}$ g

해설

현미와 율무의 1g 당 가격은 각각 $\frac{10000}{a}$ 원, $\frac{10000}{b}$ 원이고, 현미와 율무를 섞은 현미율무는 2g 에 $\left(\frac{10000}{a} + \frac{10000}{b}\right)$ 원이므로

1 원에 $\left(\frac{2}{\frac{10000}{a} + \frac{10000}{b}}\right)$ g 을 살 수 있다.

따라서 현미율무는 10000 원에

$\frac{20000}{\frac{10000}{a} + \frac{10000}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$(g) 을 살 수 있다.

28. 자연수 n 을 7 로 나눈 나머지를 $f(n)$ 이라 정의할 때, $f(8^{12} \times 25^{18})$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 1

해설

$8^{12} \times 25^{18} = (2^3)^{12} \times (5^2)^{18} = 2^{36} \times 5^{36} = 10^{36}$ 이므로 $f(8^{12} \times 25^{18}) = f(10^{36})$

10 을 7 로 나눈 나머지는 3 이므로 10^{36} 를 7 로 나눈 나머지는 $3^{36} = (3^2)^{18} = 9^{18}$ 을 7 로 나눈 나머지와 같다.

또, 9 를 7 로 나눈 나머지는 2 이므로 9^{18} 을 7 로 나눈 나머지는 $2^{18} = (2^3)^6 = 8^6$ 을 7 로 나눈 나머지와 같다.

또, 8 을 7 로 나눈 나머지는 1 이므로 8^6 을 7 로 나눈 나머지는 1^6 을 7 로 나눈 나머지와 같다.

따라서 10^{36} 를 7 로 나눈 나머지는 1,

즉 $f(10^{36}) = 1$

29. $7^{7^{(7)^2}}$ 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

[배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 3

해설

7의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 $7, 9, 3, 1$ 이 계속 반복된다.

$7^{7^{(7)^2}} = 7^{7^{49}}$ 에서

7^{49} 의 일의 자리의 숫자는 $49 = 4 \times 12 + 1$ 이므로 7 이다.

$x = 7^{49}$ 일 때, 7^x 의 일의 자리의 숫자는 7^7 의 일의 자리의 숫자와 같으므로

$7^{7^{(7)^2}} = 7^{7^{49}}$ 의 일의 자리의 숫자는 $7 = 4 \times 1 + 3$ 이므로 3 이다.

30. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16$ 이 4^n 으로 나누어 떨어지는 자연수 n 의 최댓값을 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 3

해설

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16 = 1 \times 4^{\frac{1}{2}} \times 3 \times 4 \times 5 \times (4^{\frac{1}{2}} \times 3) \times 7 \times 4^{\frac{3}{2}} \times 9 \times (4^{\frac{1}{2}} \times 5) \times 11 \times (4 \times 3) \times 13 \times (4^{\frac{1}{2}} \times 7) \times 15 \times 4^2$

$\rightarrow 4$ 의 인수를 모두 곱하면, $4^{\frac{1}{2}} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 2 = 4^{\frac{7}{2}}$ 이다.

$\therefore 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16$ 이 4^n 으로 나누어 떨어지는 자연수 n 의 최댓값은 3이다.