

문제 풀이 과제

1. 다음 중 옳지 않은 것을 골라라. [배점 2, 하하]

- ① $a^6 \div a^2 = a^4$ ② $b^3 \div b = b^2$
 ③ $a^6 \div a^3 = a^2$ ④ $a^{15} \div a^8 = a^7$
 ⑤ $x^5 \div x^3 = x^2$

해설

- ① $a^6 \div a^2 = a^{6-2} = a^4$
 ② $b^3 \div b = b^{3-1} = b^2$
 ③ $a^6 \div a^3 = a^{6-3} = a^3$
 ④ $a^{15} \div a^8 = a^{15-8} = a^7$
 ⑤ $x^5 \div x^3 = x^{5-3} = x^2$

2. $2^{2x} \times 8^x = 4^2 \times 2^x$ 를 만족하는 x 의 값은?
 [배점 2, 하하]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} 2^{2x} \times 2^{3x} &= (2^2)^2 \times 2^x \\ 2^{5x} &= 2^{x+4} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

3. 다음은 $(xy^3)^2 \div (-y)^3$ 의 풀이 과정이라고 할 때, 처음 틀린 부분을 찾아라.

보기

- ㉠ $(xy^3)^2 \div (-y)^3 = x^2y^6 \div (-y)^3$
 ㉡ $x^2y^6 \div (-y)^3 = x^2y^6 \div y^3$
 ㉢ $x^2y^6 \div y^3 = \frac{x^2y^6}{y^3}$
 ㉣ $\frac{x^2y^6}{y^3} = x^2y^3$

[배점 2, 하하]

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉡

▶ 정답 : ㉡

해설

$(xy^3)^2 \div (-y)^3 = x^2y^6 \div (-y)^3 = x^2y^6 \div (-y^3) = \frac{x^2y^6}{-y^3} = -x^2y^3$ 이다.
 따라서 ㉡에서 $-y^3$ 이 $(-y^3)$ 으로 변환되어야 한다. ㉢, ㉣은 ㉡에서 잘못된 값을 계속 가지고 있지만 ㉢, ㉣ 식 자체만으로는 틀리지 않았다.

4. $18a^3b^3 \div 3a^2b \times 2b$ 를 간단히 하면?

[배점 2, 하중]

- ① $3ab$ ② $6ab^2$ ③ $12ab^2$
 ④ $3ab^3$ ⑤ $12ab^3$

해설

$$18a^3b^3 \times \frac{1}{3a^2b} \times 2b = 12ab^3$$

5. 다음 중 옳지 않은 것은?

[배점 2, 하중]

① $a^8 \div a^4 = a^2$

② $a^2 \times a^3 = a^5$

③ $(a^5)^2 \div a^{10} = 1$

④ $(a^2)^4 \div (a^3)^4 = \frac{1}{a^4}$

⑤ $(a^2 \times a^6)^2 = a^{16}$

해설

① $a^8 \div a^4 = a^4$

6. 다음 계산 중 옳은 것을 모두 찾으려면?

[배점 2, 하중]

① $a^3 \times a^7 = a^{10}$

② $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^8$

③ $(x^2)^2 \times (x^3)^2 = x^{10}$

④ $x^2 \times y^4 \times x^6 \times y^2 = x^8 y^6$

⑤ $(x^3)^2 \times x^2 \times (x^2)^2 = x^{11}$

해설

② $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^6$

⑤ $(x^3)^2 \times x^2 \times (x^2)^2 = x^{3 \times 2} \times x^2 \times x^{2 \times 2}$
 $= x^{6+2+4} = x^{12}$

7. n 이 홀수 일 때,

$(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}$ 의 값을 구하여라.

[배점 3, 하상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 2

해설

$2n$ 의 짝수, $2n+1$ 은 홀수이므로

$(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1} = 1 - (-1) = 2$

8. $(2x^A y)^2 \div 2x^4 y \times x^3 y^4 = Bx^5 y^C$ 일 때, $A + B - C$ 의 값은?

[배점 3, 하상]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\frac{4x^{2A} y^2 \times x^3 y^4}{2x^4 y} = 2x^{2A-1} y^5 = Bx^5 y^C$
 $A = 3, B = 2, C = 5$ 따라서 $A + B - C = 0$ 이다.

9. $a^{10} \div (a^3)^x = (a^2)^2$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

[배점 3, 하상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 2

해설

$$a^{10} \div a^{3x} = a^4 \text{ 이므로 } 10 - 3x = 4 \\ \therefore x = 2$$

10. 다음 결과 중 옳은 것은?

[배점 3, 중하]

- ① $a^2 \times a^4 = a^8$
- ② $(a^2)^3 \times (b^2)^2 = a^5b^4$
- ③ $(a^3)^2 \times a^2 \times (b^3)^2 = a^8b^6$
- ④ $(a^4)^2 \times (b^3)^2 \times b^2 = a^6b^7$
- ⑤ $2(a^2)^5 \times a^4 \times \frac{1}{2}b^3 = a^{11}b^3$

해설

- ① $a^2 \times a^4 = a^6$
- ② $(a^2)^3 \times (b^2)^2 = a^6b^4$
- ③ $(a^3)^2 \times a^2 \times (b^3)^2 = a^{6+2}b^6 = a^8b^6$
- ④ $(a^4)^2 \times (b^3)^2 \times b^2 = a^8b^{6+2} = a^8b^8$
- ⑤ $2(a^2)^5 \times a^4 \times \frac{1}{2}b^3 = a^{10+4}b^3 = a^{14}b^3$

11. 다음과 같이 6 개의 식이 있다. 다음 식들 중 계산 결과가 같은 것을 찾아라.

㉠ $\frac{b^2a}{27} \times \frac{ba^2}{3}$	㉡ $\frac{a}{3} \left(\frac{ba}{3}\right)^2$
㉢ $\left\{\frac{1}{3}(a^2b)^2\right\}^2$	㉣ $\left(\frac{ab}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3}$
㉤ $\frac{a}{9} \times \left(\frac{ab^2}{3}\right)^2$	㉥ $\frac{1}{a} \left(\frac{ab}{3}\right)^3$

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: ㉠

▷ 정답: ㉢

▷ 정답: ㉤

해설

- ㉠ $\frac{b^2a}{27} \times \frac{ba^2}{3} = \frac{a^3b^3}{81}$
- ㉡ $\frac{a}{3} \left(\frac{ba}{3}\right)^2 = \frac{a^3b^2}{27}$
- ㉢ $\left(\frac{1}{3}a^4b^2\right)^2 = \frac{a^8b^4}{9}$
- ㉣ $\left(\frac{ab}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{a^3b^3}{81}$
- ㉤ $\frac{a}{9} \times \frac{a^2b^4}{9} = \frac{a^3b^4}{81}$
- ㉥ $\frac{1}{a} \left(\frac{ab}{3}\right)^3 = \frac{a^2b^3}{27}$

12. 다음 중 옳은 것을 고르면?

[배점 3, 중하]

- ① $(-3x^3)^2 = -3x^5$
- ② $(-2^2x^4y)^3 = 32x^7y^3$
- ③ $(2a^2)^4 = 16a^6$
- ④ $\left(-\frac{a^2}{b^4}\right)^2 = \frac{a^4}{b^8}$
- ⑤ $\left(-\frac{3y^2}{x}\right)^3 = -\frac{27y^5}{x^4}$

해설

- ① $(-3x^3)^2 = (-3)^2 x^6 = 9x^6$
 ② $(-2^2 x^4 y)^3 = (-2^2)^3 x^{12} y^3 = -64x^{12}y^3$
 ③ $(2a^2)^4 = 16a^8$
 ④ $\left(-\frac{a^2}{b^4}\right)^2 = \frac{a^4}{b^8}$
 ⑤ $\left(-\frac{3y^2}{x}\right)^3 = -\frac{27y^6}{x^3}$

해설

$$5^5 \div 5^a = 5^{5-a} = 5^2$$

$$5 - a = 2 \quad \therefore a = 3$$

$$5 \times 5^b = 5^4, 5^{b+1} = 5^4$$

$$b + 1 = 4 \quad \therefore b = 3$$

$$a = 3, b = 3$$

$$\therefore a - b = 0$$

13. $3^{2x+1} = 27^{x-2}$ 이 성립할 때, x 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 7

▶ 정답 : 7

해설

$$3^{2x+1} = (3^3)^{x-2}, 2x + 1 = 3(x - 2) \therefore x = 7$$

14. $5^5 \div 5^a = 25$, $5^b + 5^b + 5^b + 5^b + 5^b = 5^4$ 일 때, $b - a$ 의 값은?

[배점 4, 중중]

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

15. $(-5x^2y)^3$ 을 간단히 하면?

[배점 4, 중중]

- ① $125x^6y^3$ ② $-125x^6y^3$ ③ $-125x^3y^6$
 ④ $125x^3y^6$ ⑤ $-125x^3y^3$

해설

$$(-5x^2y)^3 = (-5)^3 x^6 y^3 = -125x^6y^3$$

16. 3^x 의 일의 자리의 숫자가 1, 3^y 의 일의 자리의 숫자가 3 일 때, $81^x \div 9^y$ 의 일의 자리의 숫자를 구하면? (단, x, y 는 $x > y$ 인 자연수) [배점 5, 중상]

- ① 1 ② 3 ③ 9 ④ 7 ⑤ 2

해설

3^k (k 는 자연수) 의 일의 자리는

3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ...

$$\therefore x = 4k_1, y = 4k_2 - 3$$

(단, $k_2 \leq k_1$, k_1, k_2 는 자연수이다.)

$$\begin{aligned} 81^x \div 9^y &= 3^{4x-2y} \\ &= 3^{16k_1-8k_2+6} \\ &= 3^{2(8k_1-4k_2+3)} \\ &= 9^{8k_1-4k_2+3} \end{aligned}$$

9^k (k 는 자연수) 의 일의 자리는 9, 1, 9, 1, ...

k_1, k_2 가 자연수이므로 $8k_1, 4k_2$ 는 짝수이다.

따라서 $8k_1 - 4k_2 + 3$ 은 홀수이므로

$81^x \div 9^y$ 의 일의 자리는 9 이다.

17. $2^{17} \times 5^{20}$ 은 n 자리의 자연수이고, 3^{2008} 의 일의 자리의 숫자는 m 일 때, $n + m$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 21

▶ 정답 : 21

해설

$$2^{17} \times 5^{20} = (2^{17} \times 5^{17}) \times 5^3 = 125 \times 10^{17}$$

$$\therefore n = 20$$

3^m 의 일의 자리의 수는 3, 9, 7, 1 로 반복되고

$$2008 = 4 \times 502 \text{ 이므로 } m = 1$$

$$\therefore n + m = 21$$

18. x, y 가 짝수일 때, $(-4)^3 \div (-2)^y = (-2)^{x-6}$ 이다.
 $x + y$ 의 값을 구하면? [배점 5, 중상]

- ① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 12

해설

$$(-2^2)^3 \div (-2)^y = (-2)^{6-y} = (-2)^{x-6}$$

$$6 - y = x - 6$$

$$\therefore x + y = 12$$

19. $(-3x^2y)^2 \div \frac{3x^2y^4}{2y^2} - 2x^3y^2 \times \frac{1}{xy^2}$ 의 값은?

[배점 5, 상하]

- ① $3xy^3$ ② $-3x^3y$ ③ $-4x^2$

- ④ $4x^2$ ⑤ $4x^2y$

해설

$$\begin{aligned} &(-3x^2y)^2 \div \frac{3x^2y^4}{2y^2} - 2x^3y^2 \times \frac{1}{xy^2} \\ &= 9x^4y^2 \times \frac{2y^2}{3x^2y^4} - 2x^3y^2 \times \frac{1}{xy^2} \\ &= 6x^2 - 2x^2 = 4x^2 \end{aligned}$$

20. n 이 자연수일 때, $(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \dots + (-1)^{2n-1}$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : -1

▶ 정답 : -1

해설

$$(\text{준식}) = (-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots+(-1+1) - 1 = -1$$

21. $3^{2000} \leq n^{2000} \leq A^{1000}$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 모두 4 개일 때, A 의 최솟값을 구하여라. (단, A 는 자연수) [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

▷ 정답 : 36

해설

각 항의 지수를 통일하면

$$3^{2000} \leq n^{2000} \leq A^{1000}$$

$$(3^2)^{1000} \leq (n^2)^{1000} \leq A^{1000}$$

따라서 $3^2 \leq n^2 \leq A$ 를 만족하는 자연수 n 의 값이 4 개이므로

순서대로 $n = 3, 4, 5, 6$ 이다.

$\therefore 6^2 \leq A < 7^2$ 에서 A 의 최솟값은 36

22. $2^{60}, 3^{40}, 4^{30}, 5^{24}$ 중 가장 큰 수를 M , 가장 작은 수를 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값의 일의 자리 숫자를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : 5

해설

$2^{60}, 3^{40}, 4^{30}$ 에서 세 지수의 최대공약수가 10 이므로

$$2^{60} = (2^6)^{10} = 64^{10}, 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}, 4^{30} = (4^3)^{10} = 64^{10}$$

$$2^{60} = 4^{30} < 3^{40}$$

$2^{60}, 5^{24}$ 에서 두 지수의 최대공약수가 12 이므로

$$2^{60} = (2^5)^{12} = 32^{12}, 5^{24} = (5^2)^{12} = 25^{12}$$

$$25^{12} < 2^{60} = 4^{30} < 3^{40}$$

따라서 3^n 의 일의 자리 숫자는 $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

일 때, 3, 9, 7, 1 을 반복하므로

3^{40} 의 일의 자리 숫자는 1

5^n 의 일의 자리 숫자는 n 의 값에 상관없이 항상 5 이다.

5^{24} 의 일의 자리 숫자는 5

따라서 $M \times m$ 의 값의 일의 자리 숫자는 5 이다.

23. 임의의 자연수 a, b 에 대하여 $x^a y^b = (3^{-1})^{b-a}$ 와 $x^b y^a = (3^{-1})^{a-b}$ 일 때, xy 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 1

해설

$$x^a y^b = (3^{-1})^{b-a} \dots \textcircled{㉠}$$

$$x^b y^a = (3^{-1})^{a-b} \dots \textcircled{㉡} \text{ 이라 할 때}$$

두 식을 좌변끼리 우변끼리 각각 곱하면

$$\begin{aligned} (3^{-1})^{b-a} \times (3^{-1})^{a-b} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{b-a} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{a-b} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{b-a+a-b} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^a y^b \times x^b y^a &= x^{a+b} \times y^{a+b} \\ &= (xy)^{a+b} \end{aligned}$$

$a+b$ 가 자연수 이므로 $(xy)^{a+b} = 1$ 을 만족하는 xy 는 1이다.

24. 유진이는 10000 원으로 현미 ag 을 사거나 울무 bg 을 사려고 한다. 현미와 울무를 같은 무게의 비로 섞어서 만든 현미울무는 10000 원에 몇 g 을 살 수 있는 지 a, b 를 사용하여 나타내어라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{2ab}{a+b} g$

▷ 정답: $\frac{2ab}{a+b} g$

해설

현미와 울무의 1g 당 가격은 각각 $\frac{10000}{a}$ 원, $\frac{10000}{b}$ 원이고, 현미와 울무를 섞은 현미울무는 2g 에 $\left(\frac{10000}{a} + \frac{10000}{b}\right)$ 원이므로

1 원에 $\left(\frac{2}{\frac{10000}{a} + \frac{10000}{b}}\right) g$ 을 살 수 있다.

따라서 현미울무는 10000 원에 $\frac{20000}{\frac{10000}{a} + \frac{10000}{b}} = \frac{2ab}{a+b} (g)$ 을 살 수 있다.

25. 자연수 n 을 7 로 나눈 나머지를 $f(n)$ 이라 정의할 때, $f(8^{12} \times 25^{18})$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: 1

해설

$$8^{12} \times 25^{18} = (2^3)^{12} \times (5^2)^{18} = 2^{36} \times 5^{36} = 10^{36}$$

$$\text{이므로 } f(8^{12} \times 25^{18}) = f(10^{36})$$

10 을 7 로 나눈 나머지는 3 이므로 10^{36} 를 7 로 나눈 나머지는 $3^{36} = (3^2)^{18} = 9^{18}$ 을 7 로 나눈 나머지와 같다.

또, 9 를 7 로 나눈 나머지는 2 이므로 9^{18} 을 7 로 나눈 나머지는 $2^{18} = (2^3)^6 = 8^6$ 을 7 로 나눈 나머지와 같다.

또, 8 을 7 로 나눈 나머지는 1 이므로 8^6 을 7 로 나눈 나머지는 1^6 을 7 로 나눈 나머지와 같다.

따라서 10^{36} 를 7 로 나눈 나머지는 1,

$$\text{즉 } f(10^{36}) = 1$$

26. $7^{7^{(7)^2}}$ 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

[배점 6, 상상]

▶ 답:

▷ 정답: 3

▷ 정답: 3

해설

7의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1 이 계속 반복된다.

$$7^{(7)^2} = 7^{49} \text{ 에서}$$

7^{49} 의 일의 자리의 숫자는 $49 = 4 \times 12 + 1$ 이므로 7 이다.

$x = 7^{49}$ 일 때, 7^x 의 일의 자리의 숫자는 7^7 의 일의 자리의 숫자와 같으므로

$7^{(7)^2} = 7^{49}$ 의 일의 자리의 숫자는 $7 = 4 \times 1 + 3$ 이므로 3 이다.

27. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16$ 이 4^n 으로 나누어 떨어지는 자연수 n 의 최댓값을 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

▶ 정답 : 3

해설

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16 = 1 \times 4^{\frac{1}{2}} \times 3 \times 4 \times 5 \times (4^{\frac{1}{2}} \times 3) \times 7 \times 4^{\frac{3}{2}} \times 9 \times (4^{\frac{1}{2}} \times 5) \times 11 \times (4 \times 3) \times 13 \times (4^{\frac{1}{2}} \times 7) \times 15 \times 4^2$$

→ 4의 인수를 모두 곱하면, $4^{\frac{1}{2}} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 2 = 4^{\frac{7}{2}}$ 이다.

∴ $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16$ 이 4^n 으로 나누어 떨어지는 자연수 n 의 최댓값은 3이다.