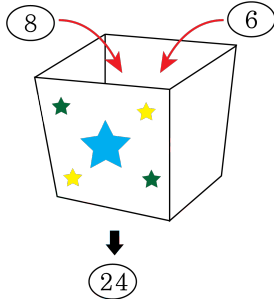


단원 종합 평가

1. 다음 그림과 같은 요술 상자에 두 장의 수 카드를 넣으면 두 수의 최소공배수가 적힌 카드가 한 장 나온다고 한다. 경희, 해진, 민호가 아래와 같은 카드를 넣었을 때, 가장 큰 수가 적힌 카드가 나온 사람은 누구인지 말하여라.



경희 : 14, 16

해진 : 12, 20

민호 : 15, 18

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 민호

해설

경희)

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 14} \\ 7 \end{array}$$

$$14 = 2 \times 7$$

$$\text{최소공배수} : 2^4 \times 7 = 112$$

해진)

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

$$\text{최소공배수} : 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

민호)

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 15} \\ 5 \end{array}$$

$$15 = 3 \times 5$$

$$\text{최소공배수} : 2 \times 3^2 \times 5 = 90$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 16} \\ 2 \overline{) 8} \\ 2 \overline{) 4} \\ 2 \end{array}$$

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 20} \\ 2 \overline{) 10} \\ 5 \end{array}$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18} \\ 2 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$$

$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$$

2. $1010_{(2)}$ 보다 2 만큼 큰 수를 a , $10111_{(2)}$ 보다 1 만큼 작은 수를 b 라고 할 때, 두 수 a, b 의 합을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 34

해설

$$1010_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2 = 8 + 2 = 10$$

$$\therefore a = 12$$

$$10111_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 16 + 4 + 2 + 1 = 23$$

$$\text{따라서 } b = 22$$

$$\therefore a + b = 34$$

3. 세 자연수 $2^3 \times 3^2 \times 5^2$, $2^3 \times 3^3 \times 5$, $2^4 \times 3^2 \times 7$ 의 공약수가 아닌 것은? [배점 4, 중중]

① 1

② $2^3 \times 3$

③ 18

④ $2^3 \times 3 \times 5$

⑤ $2^2 \times 3^2$

해설

공약수는 최대공약수의 약수, 최대공약수를 구하면 $2^3 \times 3^2$

따라서 ④ $2^3 \times 3 \times 5$ 는 공약수가 아니다.

4. 두 자연수 A, B 의 최소공배수가 28 일 때, A 와 B 의 공배수 중 200 이하의 자연수의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 7개

해설

공배수는 최소공배수의 배수이므로, 최소공배수인 28 의 배수 중 200 보다 작은 자연수의 개수를 구한다. $200 \div 28 = 7.14 \dots$

따라서 200 보다 작은 자연수의 개수는 7 개이다.

5. 공책 21 권, 지우개 38 개, 연필 56 자루를 되도록 많은 학생들에게 똑같이 나누어주려고 하였더니 공책은 3 권이 부족하고, 지우개는 2 개가 남고, 연필은 4 자루가 부족했다. 학생은 모두 몇 명인지 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 12 명

해설

학생 수는 $21 + 3 = 24$, $38 - 2 = 36$, $56 + 4 = 60$ 의 최대공약수이다.

$24 = 2^3 \times 3$, $36 = 2^2 \times 3^2$, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로 최대공약수는 $2^2 \times 3 = 12$

따라서 12 명이다.

6. 세계문화유산인 경주 유적지 탐방에 참가한 남학생 수와 여학생 수의 최대공약수는 12 , 최소공배수는 36 이라고 한다. 남학생이 여학생보다 24 명 많다고 할 때, 탐방에 참가한 전체 학생 수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 48

해설

여학생을 x 명, 남학생을 $x + 24$ 명이라고 하면
 (두 수의 곱) = (최대공약수) $\times$ (최소공배수) 이므로
 $12 \times 36 = x \times (x + 24)$, $x = 12$ 이다.
 따라서 $12 + 36 = 48$ 이다.

7. 세 자연수 3, 4, 5 중 어느 것으로 나누어도 나머지가 모두 2인 자연수 중에서 가장 작은 세 자리 수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 122

해설

구하는 수는 (3, 4, 5의 공배수) + 2
 3, 4, 5의 최소공배수는 60이고 60의 배수는
 60, 120, 180, ... 이다.
 따라서 가장 작은 세 자리의 수는
 $120 + 2 = 122$ 이다.

8. 다음 식의 결과를 이진법으로 나타내면 끝자리의 0은 몇 개가 연속으로 오는지 구하여라.

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$$

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8개

해설

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$
 $= 1 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times 2 \times 5$
 $= 1 \times 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$
 따라서 2^8 의 배수이므로 끝자리의 0이 연속으로 8개 온다.

9. 칠진법으로 나타낸 수 $xy_{(7)}, yx_{(7)} (x > y)$ 의 합을 십진법으로 나타내면 48이다. 이러한 조건을 만족하는 $xy_{(7)}$ 의 값의 총합을 십진법으로 나타내어라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 108

해설

$xy_{(7)} = x \times 7 + y$, $yx_{(7)} = y \times 7 + x$
 $\rightarrow 8(x + y) = 48$
 $\rightarrow x + y = 6$
 $x > y$ 이므로 이 조건을 만족하는 $xy_{(7)}$ 는
 $60_{(7)}, 51_{(7)}, 42_{(7)}$ 이다.
 $\therefore 60_{(7)} + 51_{(7)} + 42_{(7)} = 42 + 36 + 30 = 108$

10. 자연수 n 의 약수의 개수를 $<n>$ 이라 할 때, $<a> \times <420> = 192$ 를 만족하는 가장 작은 a 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ 이므로
 $< 420 > = (2+1) \times (1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 24$
 $< a > \times 24 = 192$, $< a > = 8$
 $8 = 2 \times 2 \times 2$ 일 때, $a = 2 \times 3 \times 5 = 30$
 $8 = 4 \times 2$ 일 때, $a = 2^3 \times 3 = 24$
 $\therefore$ 가장 작은 a 의 값은 24 이다.

11. 약수의 개수가 12 개인 어떤 자연수 n 을 소인수분해하면 $a^x \times b^y (a \neq b)$ 이다. 이러한 자연수 n 중에서 가장 작은 수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 72

해설

$a^x \times b^y (a \neq b)$ 가 12 개의 약수를 가지려면,
 $(x+1) \times (y+1) = 12$
 $\rightarrow (x, y) = (1, 5), (2, 3), (3, 2), (5, 1)$
 따라서, 이러한 x, y 의 값을 만족하는 수 중 가장 작은 수는
 $2 \times 3^5, 2^2 \times 3^3, 2^3 \times 3^2, 2^5 \times 3$ 중 하나이다.
 $\therefore$ 자연수 n 중에서 가장 작은 수 = 72

12. 자연수 x, y 에 대하여 x, y 의 최대공약수는 (x, y) , 최소공배수는 $[x, y]$ 로 나타내기로 한다. $(a, b, c) = 7$, $(a, b) = 14$, $[a, b] = 84$, $(b, c) = 21$, $[b, c] = 126$ 일 때, $[a, b, c]$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 252

해설

$(a, b, c) = 7 \rightarrow a, b, c$ 는 인수 7 을 가진다.
 $(a, b) = 14 \rightarrow a, b$ 는 인수 2, 7 을 가진다.
 $(b, c) = 21 \rightarrow b, c$ 는 인수 3, 7 을 가진다.
 $\rightarrow b$ 는 인수 2, 3, 7 을 가진다.
 $[b, c] = 126 \rightarrow b$ 의 인수 2 의 지수는 1 이다.
 $[a, b] = 84 \rightarrow a = 2^2 \times 7, b = 2 \times 3 \times 7$,
 $(b, c) = 21, [b, c] = 126 \rightarrow c = 3^2 \times 7$
 $\therefore [a, b, c] = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$

13. 세 수 437, 389, 137 을 어떤 수로 나누었더니 그 나머지가 모두 같았다. 어떤 수 중에서 가장 큰 수와 그 때의 나머지를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 어떤 수: 12

▷ 정답: 나머지: 5

해설

어떤 수를 x , 나머지를 r 이라 하고 세 수 437, 389, 137 의 몫을 각각 Q_1, Q_2, Q_3 라 하면
 $437 = xQ_1 + r, 389 = xQ_2 + r, 137 = xQ_3 + r$
 이므로
 각각의 수의 차는 x 로 나누어 떨어진다.
 $437 - 389 = 48, 389 - 137 = 252, 437 - 137 = 300$
 48, 252, 300 의 최대공약수는 12 이므로 어떤 수는 12 이고 그 때의 나머지는 5 이다.

14. 두 자연수 p, q 의 최대공약수를 $[p, q]$ 로 정의할 때,
 $[[\frac{[p, p]}{[p, q]}, q], [\frac{[q, q]}{[p, q]}, p]]$ 를 간단히 하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} & [[\frac{[p, p]}{[p, q]}, q], [\frac{[q, q]}{[p, q]}, p]] \\ &= [[\frac{p}{[p, q]}, q], [\frac{q}{[p, q]}, p]] \\ &= [[\frac{p}{[p, q]}, q], [\frac{q}{[p, q]}, p]] \quad (\frac{p}{[p, q]}, q \text{는 서로소}) \\ &= [1, 1] \\ &= 1 \end{aligned}$$

15. 자연수 x, y, z 가 $x : y : z = 3 : 8 : 10$ 을 만족하고,
 x, y, z 의 최대공약수와 최소공배수의 합이 1452 일 때,
 x, y, z 를 각각 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : $x = 36$

▶ 정답 : $y = 96$

▶ 정답 : $z = 120$

해설

$$\begin{aligned} & x = 3a, y = 8a, z = 10a \text{ 라 두면,} \\ & x, y, z \text{ 의 최대공약수} = a, \text{ 최소공배수} = 120 \times a \\ & \text{이다.} \\ & 121 \times a = 1452 \rightarrow a = 12 \\ & \therefore x = 36, y = 96, z = 120 \end{aligned}$$