

단원 종합 평가

1. 경진이가 사는 아파트에는 중학생이 모두 30명 있다. 토요일에는 아파트로 찾아오는 이동 도서관을 이용하는데, 이동 도서관에는 가, 나 두 코너가 마련되어 있다. 토요일에 가 코너를 이용하는 학생은 18명, 나 코너를 이용하는 학생은 10명, 두 코너를 모두 이용하는 학생은 7명이라고 한다. 토요일에 이동 도서관을 이용하지 않는 학생 수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 9명

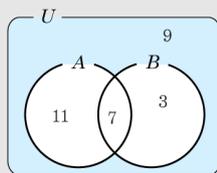
해설

아파트에 사는 중학생을 전체집합 U , 토요일에 이동 도서관의 가 코너를 이용하는 학생의 집합을 A , 나 코너를 이용하는 학생의 집합을 B 라 하면 $n(U) = 30, n(A) = 18, n(B) = 10, n(A \cap B) = 7$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 18 + 10 - 7$
 $= 21$

따라서 토요일에 이동 도서관을 이용하지 않는 학생 수는

$$n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 30 - 21 = 9 \text{ (명)}$$

벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 토요일에 이동 도서관을 이용하지 않는 학생 수는 9명이다.

2. 두 집합 $A = \{2, a + 3, 8\}$, $B = \{6, b, 7\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{7, 8\}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

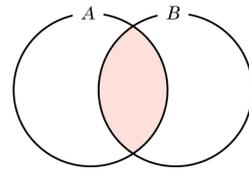
$A \cap B = \{7, 8\}$ 이므로 $7 \in A$ 이다.

$$\therefore a + 3 = 7, a = 4$$

$$8 \in B \therefore b = 8$$

$$\therefore a + b = 4 + 8 = 12$$

3. 두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 5 \text{의 배수}\}, B = \{x|x \text{는 } 75 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램으로 나타낼 때, 색칠한 부분에 해당하는 원소가 아닌 것은?

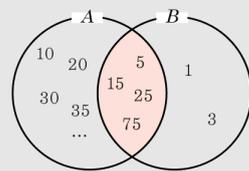


[배점 3, 중하]

- ① 5 ② 10 ③ 15 ④ 25 ⑤ 75

해설

$A = \{x|x \text{는 } 5 \text{의 배수}\} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$,
 $B = \{x|x \text{는 } 75 \text{의 약수}\} = \{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$ 이므로 두 집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 색칠한 부분에 해당하는 원소는 5, 15, 25, 75이다.

4. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 6 \text{보다 작은 자연수}\}$ 의 두 부분 집합 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 에 대하여 $(A \cup B) - B$ 는? [배점 4, 중중]

- ① {1} ② {2} ③ {1, 2}
 ④ {2, 3} ⑤ {2, 3, 4}

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로 $(A \cup B) - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$ 이다.

5. 두 수 $2^3 \times 3^4 \times 7^c$, $2^a \times 3^b \times 7^4$ 의 최대공약수가 $2^2 \times 3^2 \times 7^2$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은? [배점 4, 중중]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

최대공약수가 $2^2 \times 3^2 \times 7^2$ 이고
 $2^3 \times 3^4 \times 7^c$ 에서 2 의 지수가 3 이므로
 $2^a \times 3^b \times 7^4$ 에서 2 의 지수가 2 이어야 한다.
 같은 방식으로
 $2^3 \times 3^4 \times 7^c$ 에서 3 의 지수가 4 이므로
 $2^a \times 3^b \times 7^4$ 에서 3 의 지수가 2 이어야 한다.
 또한,
 $2^a \times 3^b \times 7^4$ 에서 7 의 지수가 4 이므로
 $2^3 \times 3^4 \times 7^c$ 에서 7 의 지수가 2 이어야 한다.
 따라서 $a = 2$, $b = 2$, $c = 2$ 이다.

6. 가로, 세로의 길이가 각각 12cm, 18cm 인 직사각형 모양의 종이를 서로 겹치지 않게 붙여서 정사각형을 만들려고 한다. 이 종이를 만들 수 있는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 36cm

해설

12와 18의 최소공배수는 36 이므로 정사각형의 한 변의 길이는 36cm 이다.

7. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중에서 1 또는 2 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 24개

해설

(i) 1 을 포함하는 경우
 $2^{5-1} = 2^4 = 16$ (개)
 (ii) 2 를 포함하는 경우
 $2^{5-1} = 16$ (개)
 (iii) 1 과 2 를 모두 포함하는 경우
 $2^{5-2} = 8$ (개)
 따라서 구하는 부분집합의 개수는
 $16 + 16 - 8 = 24$ (개) 이다.

8. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것은?
[배점 5, 중상]

- ① $A \cap B \neq B \cap A$
- ② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = A$
- ③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$
- ④ $n(A \cap B \cap \emptyset) = 0$
- ⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

- ① $A \cap B = B \cap A$
- ② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$
- ③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$
- ⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

9. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 를 조건제시법으로 나타낸 것 중 옳지 않은 것은?
[배점 5, 중상]

- ① $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 3 \text{인 정수}\}$
- ② $A = \{x \mid -1 < x \leq 3 \text{인 정수}\}$
- ③ $A = \{x \mid x \text{는 자연수를 4로 나눈 나머지}\}$
- ④ $A = \{x \mid 0 \leq x < 4 \text{인 수}\}$
- ⑤ $A = \{x \mid 0 < x \leq 3 \text{인 자연수}\}$

해설

- ④ $\{x \mid 0 \leq x < 4 \text{인 수}\}$ 에는 0, 1, 2, 3 이외에도 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 2, 5, \dots$ 등 무수히 많은 원소가 있다.

10. 360의 약수의 개수와 $2^3 \times 3^a \times 5^b$ 의 약수의 개수가 같을 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 자연수)
[배점 5, 중상]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 이므로 약수의 개수가 같기 위해서는 $a=2, b=1$ 또는 $a=1, b=2$ 이다.
 $\therefore a+b=3$

11. 100 이하의 자연수 중에서 약수의 개수가 홀수인 수는 몇 개인지 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 10개

해설

약수의 개수가 홀수인 자연수는 제곱수이므로 $1^2, 2^2, \dots, 10^2$ 의 10개가 있다.

12. 자연수를 원소로 하는 세 집합 $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 10\}$, $B = \{x \mid 5 \leq x \leq 12\}$, $C = \{x \mid 9 \leq x \leq 15\}$ 에 대하여 $A \odot B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 라 할 때, $n((B \odot C) \odot A)$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$\begin{aligned}
A \odot B &= (A \cup B) - (A \cap B) \text{ 이므로,} \\
&((B \odot C) \odot A) \\
&= (((B \cup C) - (B \cap C)) \odot A) \\
&= (\{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15\} \odot \{x | 2 \leq x \leq 10\}) \\
&= (\{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15\} \cup \{x | 2 \leq x \leq 10\}) \\
&\quad - (\{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15\} \cap \{x | 2 \leq x \leq 10\}) \\
&= \{2, 3, 4, 9, 10, 13, 14, 15\} \\
\therefore n((B \odot C) \odot A) &= 8
\end{aligned}$$

13. 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 작은 순서로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 으로 나타낼 때, $a_2 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하여라.

- 집합 A 의 원소는 항상 1 보다 크거나 같다.
- $a_1 = 1$, $x \in A$ 이면, $\frac{3}{2} \times x \in A$ 이다.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: $\frac{141}{16}$

해설

$$\begin{aligned}
a_1 = 1 \text{ 이면 } a_2 &= \frac{3}{2} \times a_1 \text{ 이고 이러한 방식으로} \\
\text{집합 } A \text{ 를 구하면,} \\
\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} &= \\
\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)} \times a_1\right\} \\
, \\
a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{9}{4}, a_5 &= \frac{81}{16} \text{ 이다.} \\
\therefore a_2 + a_3 + a_5 &= \frac{141}{16}
\end{aligned}$$

14. 자연수 n 의 약수의 개수를 $S(n)$ 이라 정의한다. $\frac{S(n)}{S(17)} = S(16)$ 을 만족하는 n 중에서 가장 작은 수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: 48

해설

$S(17) = 2, S(16) = 5$ 이므로, $S(n) = 10$ 이다.
 $n = a^x \times b^y$ 라 두면, $(x+1) \times (y+1) = 10$ 이므로,
 $(x, y) = (1, 4), (4, 1)$ 이다.
이러한 x, y 의 값을 만족하는 수 중 가장 작은 수는
 $2^1 \times 3^4, 2^4 \times 3^1$ 중의 하나이다.
 $\therefore n$ 중에서 가장 작은 수 = 48

15. 200 개의 10 원 동전이 일렬로 나란히 놓여 있다. 이 중 처음에는 200 개의 동전 모두를 50 원 동전으로 바꾸고, 두 번째에는 왼쪽에서 짝수 번째에 있는 동전만 10 원 동전으로 다시 바꾸고, 세 번째에는 3 번째, 6 번째, 9 번째, ... 동전 중 10 원 동전인 것은 50 원 동전으로 50 원 동전인 것은 10 원 동전으로 바꾼다. 같은 방법으로 네 번째, 다섯 번째, ..., 200 번째에서는 4 의 배수번째, 5 의 배수번째, ... 200 의 배수번째 동전의 종류를 바꾼다고 할 때, 마지막에 놓여있는 금액은 처음보다 얼마 늘어나는지 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▶ 정답: 560 원

해설

주어진 조건을 보면 n 번째 동전은 n 의 약수의 개수만큼 뒤집어진다는 것을 알 수 있다.

1 을 제외한 수 중 약수의 개수가 홀수 개인 수는 어떤 수의 제곱이 되는 수이므로,

홀수 번 뒤집어지는 수는
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196
이다.

따라서, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144,
169, 196 번째 동전만 50 원이 되고 나머지는 모두
10 원이므로

\therefore (마지막에 놓여있는 금액 - 처음 놓여있는 금액)
 $= 14 \times 40 = 560$ (원)