

단원 종합 평가

1. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2) 48 \\ 2) 24 \\ 2) 12 \\ 2) 6 \\ 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 $\square$ 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

2. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개) [배점 3, 중하]

- ① 십진법에서 사용하는 수는 1 부터 9 까지 모두 9 개이다.
 ② 이진법은 자리가 하나씩 올라감에 따라 자리의 값이 2 배씩 커진다.
 ③ $1 \times 10^4 + 1 \times 10 = 10010$
 ④ $12 = 1100_{(2)}$
 ⑤ $2 + 2 = 101_{(2)}$

해설

- ① 0 부터 9 까지의 10 개이다.
 ⑤ $2 + 2 = 4$
 $101_{(2)} = 1 \times 2^2 + 1 \times 1 = 4 + 1 = 5$

3. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 일 때, $A \cup X = A$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4 개

해설

$A \cup X = A$ 에서 $X \subset A$,
 $(A \cap B) \cup X = X$ 에서 $(A \cap B) \subset X$ 이므로
 $(A \cap B) \subset X \subset A$
 $\{2, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 4, 8\}$
 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 2, 4 를 반드시 포함하는 집합이므로 그 개수는 $2^2 = 4$ (개)

4. 집합 $A = \{1, 2, a, 5\}$, $B = \{2, b+1, b+2, 6\}$ 이고 $A \cap B = \{2, 4\}$ 라고 할 때, $(A - B) \cup (B - A)$ 는? [배점 4, 중중]

- ① $\{1, 3\}$ ② $\{1, 5\}$
 ③ $\{1, 3, 5\}$ ④ $\{1, 3, 6\}$
 ⑤ $\{1, 3, 5, 6\}$

해설

$A \cap B = \{2, 4\}$ 이므로 $a = 4$, $A = \{1, 2, 4, 5\}$ 이다.
 (1) $b+1 = 4$ 일 경우, $A \cap B = \{2, 4, 5\}$ 가 되어 조건에 맞지 않는다.
 (2) $b+2 = 4$ 일 경우, $A \cap B = \{2, 4\}$ 가 되어 조건에 맞는다.
 따라서 $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 6\}$ 이 되어
 $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 5\} \cup \{3, 6\} = \{1, 3, 5, 6\}$ 이다.

5. 전체집합 U 의 부분집합을 A 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하지 않는 것을 모두 고르면?(정답 2 개)

[배점 4, 중중]

- ① $(A^c)^c = A$ ② $A \cup A^c = U$
 ③ $A \cap A^c = A$ ④ $U^c = A$
 ⑤ $\emptyset^c = U$

해설

- ③ $A \cap A^c = \emptyset$
 ④ $U^c = \emptyset$

6. 두 집합 $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 집합 $C = \{x \mid x = a \times b, a \in A, b \in B\}$ 이다. 이때, 집합 C 를 원소나열법으로 나타낸 것은? [배점 5, 중상]

- ① $\{0\}$ ② $\{0, 1\}$
 ③ $\{0, 1, 2\}$ ④ $\{0, 1, 2, 3\}$
 ⑤ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

해설

$0 \times 1 = 0, 0 \times 2 = 0, 0 \times 3 = 0, 1 \times 1 = 1, 1 \times 2 = 2, 1 \times 3 = 3$ 이므로 $C = \{0, 1, 2, 3\}$ 이다.

7. $2^{10} = 1024$ 를 이용하여 $1024 - 2^9 - 2^a = 256$ 을 만족하는 자연수 a 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 8

해설

$2^{10} = 1024$ 이므로 $2^9 = 512$ 이다.

따라서 $1024 - 512 - 2^a = 256, 2^a = 256$ 이므로 $a = 8$ 이다.

8. 밑변의 길이가 $1011_{(2)}\text{cm}$, 높이가 $110_{(2)}\text{cm}$ 인 삼각형의 넓이를 십진법으로 나타내어라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 33cm^2

해설

(밑변) $= 1011_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 8 + 2 + 1 = 11(\text{cm})$

(높이) $= 110_{(2)} = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 4 + 2 = 6(\text{cm})$

$\therefore$ (넓이) $= 11 \times 6 \div 2 = 33(\text{cm}^2)$

9. $\frac{35}{6}, \frac{10}{3}, \frac{5}{9}$ 의 어느 것과 곱하여도 자연수가 되는 분수 중 가장 작은 분수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: $\frac{18}{5}$

해설

$\frac{(6, 3, 9\text{의 최소공배수})}{(35, 10, 5\text{의 최대공약수})} = \frac{18}{5}$

10. 세 자리의 자연수 중에서 일의 자리 숫자가 4의 배수인 수의 집합을 A , 십의 자리 숫자가 4의 배수인 수의 집합을 B , 일의 자리의 숫자가 4의 배수인 수의 집합을 C 라 할 때, $n(A \cap B \cap C)$ 를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 18

해설

일의 자리 숫자가 4의 배수인 수의 집합과 십의 자리 숫자가 4의 배수인 수의 집합, 일의 자리의 숫자가 4의 배수인 수의 집합의 교집합은 세 자리 모두 4의 배수인 수로 이루어진 수의 집합이다.
4의 배수가 될 수 있는 한 자리 수는 0, 4, 8이지만, 백의 자리에는 0이 올 수 없다.

$$\therefore n(A \cap B \cap C) = 2 \times 3 \times 3 = 18$$

11. 두 집합 $A = \{2, 1, a+3, b\}$, $B = \{4, a, b+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

(i) $a+3=4$ 일 때, $a=1$

$$A = \{2, 1, 4, b\}$$

$$B = \{4, 1, b+1\}$$

$$b+1=2, b=1(\times)$$

(ii) $b=4$ 일 때,

$$A = \{2, 1, a+3, 4\}$$

$$B = \{4, a, 5\}$$

$$a+3=5, a=2(\bigcirc)$$

$$\therefore a+b=2+4=6$$

12. 63를 소인수분해 한 것으로 옳은 것은?

[배점 5, 상하]

① 7×9

② 2^6

③ $3^2 \times 7$

④ $2^2 \times 3 \times 5$

⑤ $2^6 \times 9$

해설

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 63} \\ 3 \overline{) 21} \\ 7 \end{array}$$

13. 두 자연수 a, b 의 합은 216이고 최대공약수는 18이다. 이 때 ab 의 최댓값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 11664

해설

$a = 18 \times n, b = 18 \times m$ 이라 둘 수 있다.

$$a+b=18 \times (n+m)=216$$

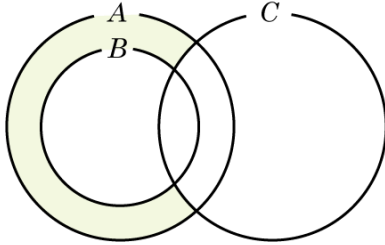
$$\rightarrow n+m=12$$

따라서 (n, m) 이 될 수 있는 순서쌍은 $(1, 11), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7), (6, 6), (7, 5), (8, 4), (9, 3), (10, 2), (11, 1)$ 이다.

그런데 $ab = 18 \times 18 \times n \times m$ 이므로 ab 가 최댓값은 $n=m=6$ 일 때이다.

$$\therefore ab \text{의 최댓값} = 11664$$

14. 집합 $A = \{x | x < 20, x \text{는 홀수인 자연수}\}$, $B = \{2x + 1 | x \text{은 5보다 작은 자연수}\}$,
 $C = \left\{x \mid \frac{x+3}{10} = n, n \text{은 자연수}\right\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 5개

해설

그림에 색칠된 부분은 $A - B - C$ 인 것을 알 수 있다.

$$A = \{x | x < 20, x \text{는 홀수인 자연수}\} \\ = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\},$$

$$B = \{2x + 1 | x \text{은 5보다 작은 자연수}\} \\ = \{3, 5, 7, 9\},$$

$$C = \left\{x \mid \frac{x+3}{10} = n, n \text{은 자연수}\right\} = \{7, 17, 27, 37, 47, \dots\},$$

따라서 $(A - B) - C = \{1, 11, 13, 15, 19\}$ 이고 원소의 개수는 5 개이다.

해설

$$\begin{aligned} & \left[\left[\frac{p}{p}, p \right], q \right], \left[\frac{q}{p}, q \right], p \right] \\ &= \left[\left[\frac{p}{p}, p \right], q \right], \left[\frac{q}{p}, q \right], p \right] \\ &= \left[\left[\frac{p}{p}, p \right], q \right], \left[\frac{q}{p}, q \right], p \right] \left(\frac{p}{p}, q \text{는 서로소} \right) \\ &= [1, 1] \\ &= 1 \end{aligned}$$

15. 두 자연수 p, q 의 최대공약수를 $[p, q]$ 로 정의할 때,
 $\left[\left[\frac{p}{p}, p \right], q \right], \left[\frac{q}{p}, q \right], p \right]$ 를 간단히 하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 1