단원 종합 평가

1. 두 집합
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $B=\{x \mid x$는 a 의 약수$\}$
에 대하여 $A\subset B$이고 $B\subset A$일 때, a의 값은?
[배점 3, 중하]

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 12 ⑤ 18

해설

$A\subset B$이고 $B\subset A$는 $A=B$이다. 집합 A는 12의 약수들의 모임이므로 $a=12$이다.

2. 집합 $A=\{x|x$는 24의 약수$\}$ 일 때, $B\subset A$ 를 만족하는 B 가 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2개)
[배점 3, 중하]

① $B=\{x|x$는 8의 약수$\}$

② $B=\{x|x$는 10 미만의 짝수$\}$

③ $B=\{x|x$는 12의 약수$\}$

④ $B=\{x|x$는 30 미만의 6의 배수$\}$

⑤ $B=\{x|x$는 18의 약수$\}$

해설

$A=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$
① $B=\{1,2,4,8\}$
② $B=\{2,4,6,8\}$
③ $B=\{1,2,3,4,6,12\}$
④ $B=\{6,12,18,24\}$
⑤ $B=\{1,2,3,6,9,18\}$

3. 전체집합 $U=\{x|x$는 8 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A=\{x|x$는 6의 약수$\}$, $B=\{2,3,5,8\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 4, 중중]

① $n(A\cap B)=2$ ② $n(B^c)=4$

③ $n(A-B)=2$ ④ $n(B\cap A^c)=3$

⑤ $n((A\cup B)^c)=2$

해설

$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A=\{1,2,3,6\}$, $B=\{2,3,5,8\}$ 이므로
④ $n(B\cap A^c)=2$ 이다.

4. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? [배점 4, 중중]

① $n(\{0\})=1$

② $\{a,\ b\}\in\{a,\ b,\ c\}$

③ $\varnothing\in\{1,\ 2,\ 3\}$

④ $n(\{0\})<n(\{1\})$

⑤ $n(\{1,\ \{2,\ 3\},\ 4,\ 5\})=4$

해설

② $\{a,\ b\}\subset\{a,\ b,\ c\}$
③ $\varnothing\subset\{1,\ 2,\ 3\}$
④ $n(\{0\})=n(\{1\})=1$

5. 1g, 2g, 4g, 8g, 16g, 32g짜리 저울추가 각각 1개씩 있다. 이들 저울추로 43g의 무게를 측정하려고 할 때, 사용되지 않는 저울추를 모두 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4 g , 16 g

해설

$1 = 1 \times 1$, $2 = 1 \times 2$, $4 = 1 \times 2^2$, $8 = 1 \times 2^3$, 43을 이진법으로 나타냈을 때, 1은 사용되는 저울추를 나타내고, 0은 사용되지 않는 저울추를 나타낸다. $43 = 101011_{(2)}$이고 2^2 의 자리의 수와 2^4 의 자리의 수가 0이므로 4g, 16g의 추가 사용되지 않는다.

6. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $B \subset A$이면 $n(B) < n(A)$이다.

㉡ $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

㉢ $A = \{\varnothing\}$이면 $n(A) = 0$이다.

㉣ U^c은 모든 집합의 부분집합이다.

㉤ $A - B = B - A$이면 $(A \cup B) \subset B$이다.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉤

해설

㉠ $B \subset A$이면$n(B) \leq n(A)$이다.
㉢ $A = \{\phi\}$이면 $n(A) = 1$이다.
㉣ $U^C = \phi$ 은 모든 집합의 부분집합이다.
㉤ $A - B = B - A$이면 $A = B$이므로 $(A \cup B) \subset B$이다.

7. 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $n(\{0\}) = 0$　　㉡ $\phi \subset \{\varnothing\}$

㉢ $4 \subset \{1,\ 2\}$　　㉣ $0 \subset \{0\}$

㉤ $0 \in \varnothing$　　㉥ $0 \notin \varnothing$

㉦ $A \subset (A \cup B)$　　㉧ $n(\varnothing) = 1$

㉨ $A \in (A \cap B)$

[배점 5, 중상]

① ㉡,㉥,㉦　② ㉡,㉤,㉧　③ ㉠,㉡,㉥
④ ㉢,㉤,㉨　⑤ ㉤,㉧,㉨

해설

㉠ $n\{(0)\} = 1$
㉢ $4 \notin \{1, 2\}$
㉣ $0 \in \{0\}$
㉤ $0 \notin \varnothing$
㉧ $n(\varnothing) = 0$
㉨ $A \subset (A \cup B)$

8. $5^4 \times \square$의 약수의 개수가 15 개일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$\square = a^x$(a는소수) 라고 하면 $5^4 \times a^x$ 의 약수의 개수는 15 개이므로
$(4+1)\times(x+1) = 15$, $x+1 = 3$, $x = 2$ 이다.
또한 가장 작은 자연수가 되기 위해서는 $a = 2$ 이다.
따라서 $\square = a^x = 2^2 = 2 \times 2 = 4$ 이다.

9. 세 자리의 두 정수의 최소공배수가 840 이고 최대공약수가 21 이라고 한다. 이때, 이를 만족하는 두 정수의 합을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 273

해설

$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$ 이고, 두 수는 최대공약수 21 의 배수이고, 세 자리 수이므로 $21 \times 5 = 105$ 와 $21 \times 2^3 = 168$ 이 된다.
$\therefore\ 105 + 168 = 273$

10. 어느 지방의 마을에서는 5 일마다 한 번씩 장이 열린다. 어느 해의 첫 장이 열린 날은 1 월 2 일 토요일일 때, 그 다음 해의 첫 장이 열리는 날의 월, 일, 요일을 찾아라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1 월

▷ 정답: 2 일

▷ 정답: 일요일

해설

1 년은 365 일이고 365 가 5 의 배수이므로,
다음 해의 첫 장도 1 월 2 일에 열린다.
일주일은 7 일,
5 와 7 의 공배수 중 365 보다 작으면서 가장 가까운 수는 350 이므로,
1 월 2 일에서 350 일이 지난 시점에 또 토요일에 장이 열린다.
다음 해 1 월 2 일은 15 일 이후이므로 다음해 첫 장은 일요일이다.
$\therefore$ 1 월 2 일 일요일

11. 집합 $A = \{x | x$는 10^n에 가장 가까운 11의 배수$\}$, $\{ n$은 자연수$\}$ 의 원소를 작은 순서대로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ 라 할 때, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$ 을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 1111110

해설

11 의 배수는 짝수 자리 수의 합에서 홀수 자리 수의 합을 뺀 절댓값이 0 이거나 11 의 배수인 수이므로,
10^n 에서 가장 가까운 11 의 배수를 차례대로 구해보면,
$10 \to 11,$
$10^2 \to 99,$
$10^3 \to 1001,$
$10^4 \to 9999,$
$10^5 \to 100001,$
$10^6 \to 999999,$
$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1111110$

12. 두 자리 자연수 a, b 의 곱은 735 이고, $a+b$ 와 $a-b$ 의 최대공약수는 14 일 때, a, b 의 최대공약수를 구하여라. (단, $a > b$) [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$735 = 3 \times 5 \times 7^2$ 이므로, 두 자리 a, b 의 순서쌍은 다음과 같다.
$(a,\ b) = (49, 15),\ (35, 21),$
위 순서쌍이 $a+b$ 와 $a-b$ 의 최대공약수 14 를 만족시켜야 하므로,
$\to a = 35,\ b = 21$
$\therefore a,\ b$ 의 최대공약수$= 7$

13. 차가 8 인 두 수의 최대공약수가 4 , 최소공배수가 60 일 때 두 수의 합을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

두 수를 $4 \times a, 4 \times b$ 라 두면,
$4 \times a - 4 \times b = 8 \to a - b = 2$,
$4 \times a \times b = 60 \to a \times b = 15$,
$a = 5, b = 3$ 이므로 두 수는 $20, 12$ 이다.
$\therefore$ (두 수의 합)$= 32$

14. 어느 학급에서 '자주 먹는 고기의 종류' 를 조사한 결과, 모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였다. 닭고기를 선택한 학생은 31 명, 돼지고기를 선택한 학생은 27 명, 소고기를 선택한 학생은 23 명이었다. 또, 세 종류의 고기 중 한 종류만 선택한 학생 중 14 명은 닭고기를, 15 명은 돼지고기를, 9 명은 소고기를 선택하였다. 세 종류의 고기를 모두 선택한 학생이 7 명일 때, 이 학급의 학생 수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 56 명

해설

닭고기를 선택한 학생의 집합을 A , 돼지고기를 선택한 학생의 집합을 B , 소고기를 선택한 학생의 집합을 C 라 두면,
닭고기만을 선택한 학생 수는 $n(A)-n(A\cap B)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)=14$,
돼지고기만을 선택한 학생 수는 $n(B)-n(A\cap B)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)=15$,
소고기만을 선택한 학생 수는 $n(C)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)=9$,
위의 세 식을 모두 더하면,
$n(A)+n(B)+n(C)-2(n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A))+3n(A\cap B\cap C)=38$,
$n(A)=31, n(B)=27, n(C)=23, n(A\cap B\cap C)=7$ 이므로
$31+27+23-2(n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A))+21=38$
$\rightarrow n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=32$
모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였으므로,
$n(U)=n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-(n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A))+n(A\cap B\cap C)$
$=31+27+23-32+7=56$

15. 무한집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $(A\cup B)^c=A\cap B^c=\varnothing$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

[배점 6, 상중]

① B 는 무한집합이다.

② B 는 무한집합이다.

③ A 가 무한집합이면 B 는 유한집합이다.

④ A 가 유한집합이면 B 는 유한집합이다.

⑤ A , B 모두 무한집합이 아니다.

해설

① A 가 유한집합이면, $(A\cup B)^c=\varnothing$ 가 되려면 $A\cup B=U$ 이므로 B 는 무한집합이어야 한다.
② A 가 무한집합이면, $A\cap B^c=\varnothing$ 가 되려면 $A-B=\varnothing$, $A\subset B$ 이므로 B 도 무한집합이어야 한다. 따라서 B 는 항상 무한집합이다.