실력 확인 문제

1. $3^2 \times 5^3$ 으로 소인수분해되는 자연수의 약수의 개수를 구하여라. [배점 2, 하하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 개

해설

$3^2 \times 5^3$ 의 약수의 개수는 $(2+1) \times (3+1) = 12$ (개) 이다.

2. 다음 설명 중 옳은 것은? [배점 2, 하하]

① 소수는 약수의 개수가 2 개이다.

② 소수는 모두 홀수이다.

③ 가장 작은 소수는 1 이다.

④ 모든 자연수는 약수의 개수가 2 개 이상이다.

⑤ 자연수에는 소수와 합성수가 있다.

해설

② 2 는 유일한 짝수인 소수이다.
③ 가장 작은 소수는 2 이다. 1 은 소수가 아니다.
④ 1 은 약수의 개수가 1 개이다.
⑤ 자연수에는 소수와 합성수 그리고 1 이 있다.

3. 다음 중 240 을 바르게 소인수분해한 것은? [배점 2, 하중]

① $2^4 \times 3 \times 5$ ② $2^3 \times 3 \times 7$

③ $2^2 \times 3^2 \times 5^2$ ④ $2^3 \times 3 \times 5^2$

⑤ $2^2 \times 3^2 \times 5$

해설

$2 \overline{)240}$
$2 \overline{)120}$
$2 \overline{)\ 60}$
$2 \overline{)\ 30}$
$3 \overline{)\ 15}$
$\quad\ \ 5$

$\therefore\ 240 = 2^4 \times 3 \times 5$

4. 소인수분해를 이용하여 24 의 약수의 개수를 써라. [배점 2, 하중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$24 = 2^3 \times 3$ 에서 2^3 의 약수는 1, 2, 2^2, 2^3 이고 3 의 약수는1, 3 이므로 24 의 약수는 다음과 같은 표에 나타낼 수 있다.

×	1	2	2^2	2^3
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24

따라서 24 의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 이고, 그 개수는 8 개이다.

5. 108 을 소인수분해 한 것으로 옳은 것은? [배점 2, 하중]

① 4×27 ② $2^2 \times 3^3$

③ $2^2 \times 3^2$ ④ $2^2 \times 3 \times 5$

⑤ $2^3 \times 3^2$

해설

$$\begin{array}{r} 2)\ 108 \\ 2)\ 54 \\ 3)\ 27 \\ 3)\ 9 \\ 3 \end{array}$$

6. a가 자연수일 때, $f(a)$ 는 a 의 약수의 개수를 나타낸다고 정의한다.
$A = \{x \mid x$는 1 이상 100 이하이고, $f(x) = 3\}$ 일 때, $n(A)$ 를 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$f(x) = 3$ 에서 약수의 개수가 3 개인 수는
(소수)^2 이므로
100 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는
$2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ 의 4 개
$\therefore\ n(A) = 4$

7. $3^a = 81,\ 5^b = 625$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$3^4 = 81,\ 5^4 = 625$ 이므로 $a+b = 4+4 = 8$ 이다.

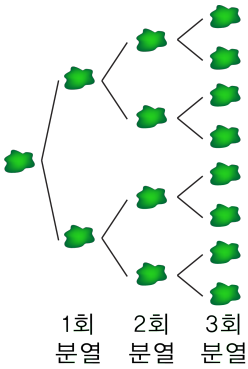
8. $\frac{72}{n}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되게 하는 자연수 n 은 모두 몇 개인가? [배점 3, 하상]

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$,
$\frac{72}{n}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서
$n = 2$, $n = 2 \times 3^2$, 2^3 , $2^3 \times 3^2$ 의 4 개이다.

9. 아메바는 둘로 분열하는 과정을 통해 번식을 한다. 아메바가 한 마리가 다음 그림과 같이 분열을 반복할 때, 전체 아메바가 50 마리 이상이 되려면 아메바가 최소 몇 회 분열을 하여야 하는가? (단, 아메바는 각각 한 번씩만 분열하는 것으로 가정한다.)



[배점 3, 중하]

① 4 회 ② 5 회 ③ 6 회
④ 7 회 ⑤ 8 회

해설

아메바 한 마리가 1 회 분열을 하면 2 마리가 생성되어 전체 아메바는 $1+2=3$ (마리)가 된다.
아메바는 각각 한 번씩만 분열하므로 2 회 분열에서는 새로 생성된 2 마리만 각자 분열을 하여 $2\times 2=4$ (마리) 가 더 생성된다. 따라서 총 마리 수는 $1+2+2^2=7$ (마리)가 된다. 그 다음 3 회 분열을 하면 $1+2+2^2+2^3=15$ (마리)가 된다.
이런 방식으로 분열이 진행될 때마다의 총 마리수를 표로 정리하면 다음과 같다.

분열	총 마리 수(마리)
1회 분열	3
2회 분열	7
3회 분열	15
4회 분열	31
5회 분열	63
⋮	⋮

따라서 최소 5 회 분열을 해야 아메바의 총 마리수가 50 마리 이상이 된다.

10. 600 을 자연수 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 나누어야 할 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

600 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 600 \\ 2 & 300 \\ 2 & 150 \\ 3 & 75 \\ 5 & 25 \\ & 5 \end{array}$$

$600 = 2^3\times 3\times 5^2$ 이므로 $\dfrac{2^3\times 3\times 5^2}{x}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 x 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 $2\times 3=6$ 이다.