

단원 종합 평가

1. 다음은 이차함수 $y = -x^2$ 에 대하여 설명한 것이다.
옳은 것을 모두 고르면? [배점 3, 중하]

- ① x 축에 대하여 대칭이다.
 ② 제 3, 4사분면을 지난다.
 ③ 아래로 볼록한 포물선이다.
 ④ $y = x^2$ 과 y 축에 대하여 대칭이다.
 ⑤ $x > 0$ 일 때, x 값이 증가하면 y 값은 감소한다.

해설

- ① y 축에 대하여 대칭이다.
 ③ 위로 볼록한 포물선이다.
 ④ $y = x^2$ 과 x 축에 대하여 대칭이다.

2. 다음 이차함수의 그래프 중 아래로 볼록한 것을 모두 고르면? [배점 3, 중하]

- ① $y = \frac{1}{2}x^2$ ② $y = -x^2$
 ③ $y = 3x^2 + 4$ ④ $y = -2 - x^2$
 ⑤ $y = x(10 - x)$

해설

이차항의 계수가 양수이면 아래로 볼록하다.

3. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 점 $(-4, k)$ 를 지난다. 이 때, k 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : -2

해설

$y = ax^2$ 의 그래프를 x 축으로 p 만큼 평행이동하면 $y = a(x-p)^2$ 이므로 $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2$ 이고, x 의 값이 -4 이므로 대입하면 $y = -2$ 이다. 따라서 $k = -2$ 이다.

4. 이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은? [배점 3, 중하]

- ① 꼭짓점은 원점이다.
 ② 대칭축은 y 축이다.
 ③ 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.
 ④ $x < 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 ⑤ 치역은 $\{y \mid y \leq 0\}$ 이다.

해설

③ 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

5. 축의 방정식이 $x = 1$ 이고, 점 $(-2, 0)$ 을 지나며 y 절편이 3인 이차함수의 최댓값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{27}{8}$

해설

축이 $x = 1$ 이므로 $y = a(x - 1)^2 + q$
 두 점 $(-2, 0), (0, 3)$ 을 지나므로
 $0 = a(-2 - 1)^2 + q, 9a + q = 0$
 $3 = a(0 - 1)^2 + q, a + q = 3$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a = -\frac{3}{8}, q = \frac{27}{8}$
 $y = -\frac{3}{8}(x - 1)^2 + \frac{27}{8}$
 따라서 $x = 1$ 일 때, 최댓값 $\frac{27}{8}$ 을 갖는다.

해설

$x = 1$ 에서 최솟값이 -2 이므로
 꼭짓점의 좌표가 $(1, -2)$ 이다.
 $y = 2x^2 + ax + b = 2(x - 1)^2 - 2 = 2x^2 - 4x$
 $a = -4, b = 0$
 $\therefore a - b = -4 - 0 = -4$

6. 세 점 $(1, -12), (0, -5), (-1, 0)$ 을 지나는 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 최댓값 : 4

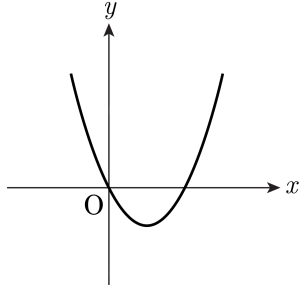
해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에 세 점을 대입한다.
 $(0, -5)$ 를 대입하면 $c = -5$
 $(-1, 0)$ 을 대입하면 $a - b + c = 0 \dots \textcircled{1}$
 $(1, -12)$ 를 대입하면 $a + b + c = -12 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하여 풀면
 $a = -1, b = -6$
 $y = -x^2 - 6x - 5 = -(x + 3)^2 + 4$
 $x = -3$ 일 때 최댓값 4 를 가지며 최솟값은 없다.

7. 이차함수 $y = 2x^2 + ax + b$ 가 $x = 1$ 에서 최솟값 -2 를 가질 때, $a - b$ 의 값을 구하면? [배점 4, 중중]

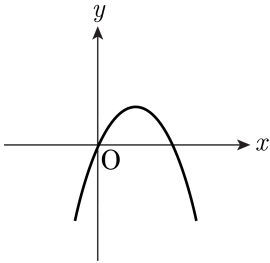
① 0 ② -2 ③ -4 ④ -3 ⑤ 6

8. $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,
 $y = cx^2 + bx + a$ 의 그래프는?

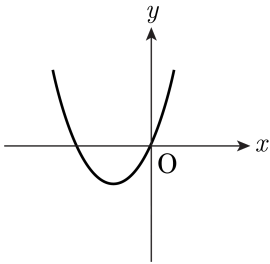


[배점 4, 중중]

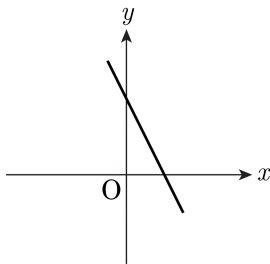
①



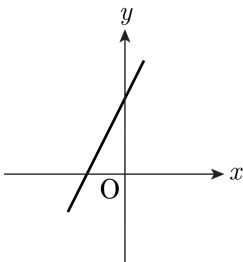
②



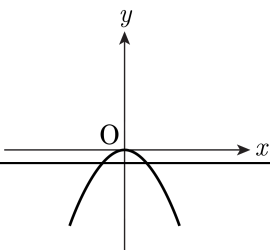
③



④



⑤



해설

주어진 그래프에서 y 절편이 0 이므로 $c = 0$, 아래로 볼록이므로 $a > 0$, 축 $x = -\frac{b}{2a}$ 가 양이므로 $b < 0$

$\therefore y = cx^2 + bx + a \leftrightarrow y = bx + a$ 에서 기울기가 음이고 y 절편이 양인 직선을 구하면 된다.

9. 둘레의 길이가 48m 인 직사각형 중 그 넓이가 가장 넓을 때의 넓이를 구하면? [배점 4, 중중]

- ① 81m^2 ② 100m^2 ③ 121m^2
 ④ 144m^2 ⑤ 169m^2

해설

가로의 길이를 $x\text{m}$, 세로의 길이를 $(24 - x)\text{m}$, 넓이를 $y\text{m}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(24 - x) \\ &= -x^2 + 24x \\ &= -(x^2 - 24x + 144 - 144) \\ &= -(x - 12)^2 + 144 \end{aligned}$$

따라서 $x = 12$ 일 때 넓이의 최댓값은 144m^2 이다.

10. 이차함수 $y = (x - 1)(x + 5)$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하고, 그 때의 x 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -2$ 일 때, 최솟값 -9

해설

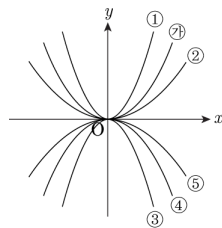
$$y = (x - 1)(x + 5)$$

$$y = x^2 + 4x - 5$$

$$y = (x + 2)^2 - 9$$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 -9 를 가지며 최댓값은 없다.

11. 다음 그림은 모두 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이며, x 축을 기준으로 위, 아래에 놓여있는 그래프는 서로 대칭이다. 그 중 ㉗는 $y = x^2$ 의 그래프이다. $-1 < a < 0$ 일 때, $y = ax^2$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



[배점 5, 중상]

해설

$-1 < a < 0$ 이므로 위로 볼록, $|a| < 1$ 이므로 폭은 ㉗ $y = x^2$ 보다 넓은 포물선이다. 따라서 ⑤번 그래프이다.

12. 이차함수 $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ 에서 $f(a) = 3$ 일 때, a 의 값을 모두 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

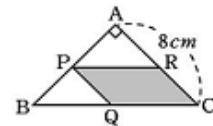
▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 2

해설

$f(a) = 2a^2 - 4a + 3 = 3$, $2a(a - 2) = 0$ 이므로 $a = 0$, $a = 2$ 이다.

13. 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC 의 $\overline{AB}$ 위에 점 P 를 잡고, 점 P 에서 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 와 평행한 직선을 그어 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ 와 만나는 점을 각각 Q , R 라 한다. $\square PQCR$ 의 넓이가 최대가 될 때, $\overline{BP}$ 의 길이를 구하면?



[배점 5, 중상]

① 1cm

② 2cm

③ 3cm

④ 4cm

⑤ 5cm

해설

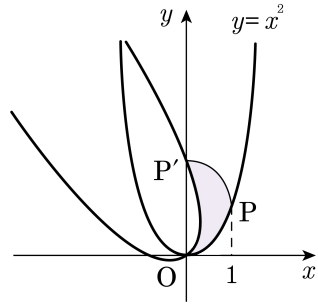
$\overline{BP} = x$ 라 놓으면

$$\square PQCR = \triangle ABC - (\triangle APR + \triangle PBQ)$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 - \left\{ \frac{1}{2} \times (8 - x)^2 + \frac{1}{2} x^2 \right\} = 32 - (x^2 - 8x + 32) = -x^2 + 8x = -(x - 4)^2 + 16$$

따라서 $\overline{BP} = 4$ cm 일 때, $\square PQCR$ 의 넓이가 최대가 된다.

14. 다음 그림과 같이 $y = x^2$ 의 그래프를 원점을 중심으로 회전했을 때, P' 에 대응한다. 점 P 가 회전한 선과 두 포물선으로 이루어지는 부분의 넓이를 구하여라.

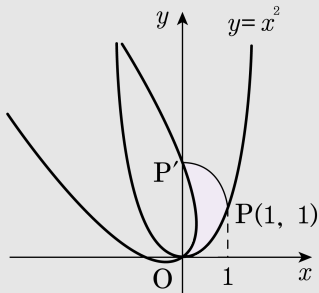


[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{1}{4}\pi$

해설



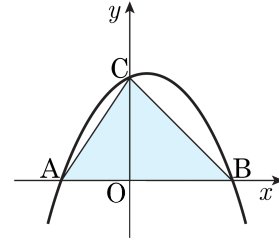
$\overline{OP}$ 를 이으면 두 부분의 넓이가 같아지므로 구하려는 부분의 넓이는 부채꼴 OPP' 의 넓이와 같다.

점 P 의 좌표가 $(1, 1)$ 이므로

$\angle POP' = 45^\circ$, $\overline{OP} = \sqrt{2}$

따라서 넓이는 $\pi \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}\pi$ 이다.

15. 이차함수 $y = -x^2 + x + 6$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 15

해설

$y = -x^2 + x + 6$ 의 C 의 좌표 $(0, 6)$

$-x^2 + x + 6 = 0$, $(x - 3)(x + 2) = 0$

$x = 3$ 또는 $x = -2$

$A(-2, 0), B(3, 0)$ 이므로

$\triangle ABC$ 의 넓이는 $5 \times 6 \times \frac{1}{2} = 15$

16. 둘레의 길이가 48cm인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되도록 하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : 12cm

▶ 정답 : 12cm

해설

가로, 세로의 길이를 각각 x cm, $(24 - x)$ cm 라 하면

$$y = x(24 - x)$$

$$= -x^2 + 24x$$

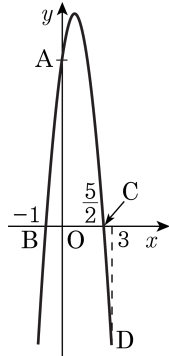
$$= -(x - 12)^2 + 144$$

$x = 12$ 일 때, 최댓값 144를 갖는다.

$$\therefore x = 12, 24 - x = 12$$

따라서 가로의 길이는 12 cm, 세로의 길이도 12 cm

17. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. $\triangle ABC$ 의 넓이가 $\frac{35}{2}$ 일 때, $\triangle BCD$ 의 넓이를 구하여라. (단, A, B, C, D는 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 위의 점이다.)



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$A(0, c), \quad B(-1, 0), \quad C\left(\frac{5}{2}, 0\right), \quad D(3, p),$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{5}{2}\right) \times c = \frac{35}{2}, c = 10$$

$$A(0, 10)$$

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + 1)\left(x - \frac{5}{2}\right),$$

$$-\frac{5}{2}a = 10, a = -4$$

$$y = -4(x + 1)\left(x - \frac{5}{2}\right) = -4x^2 + 6x + 10,$$

$$y = -4x^2 + 6x + 10 \text{ 에 } D(3, p) \text{ 를 대입하면}$$

$$p = -36 + 18 + 10 = -8, D(3, -8)$$

$$\therefore \triangle BCD = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{5}{2}\right) \times 8 = 14 \text{ 이다.}$$

18. 이차함수 $y = 3x^2 - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 y 축의 방향으로 -8 만큼 평행이동한 포물선 위의 세 점 $A(0, a)$, $B(3, b)$, $C(5, 18)$ 을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 넓이를 구하여라.

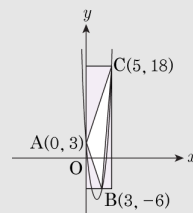
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

$$y = 3(x - 2)^2 - 1 - 8 = 3(x - 2)^2 - 9$$



$$f(0) = 3, \quad A(0, 3)$$

$$f(3) = -6, \quad B(3, -6)$$

$\triangle ABC$ 의 넓이는 사각형의 넓이에서 색칠한 부분의 넓이를 뺀 것과 같다.

$$5 \times 24 - \frac{1}{2}(5 \times 15 + 3 \times 9 + 2 \times 24) = 120 - 75 = 45$$

19. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - q$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 정수가 되게 하는 30 보다 작은 자연수 q 의 값을 모두 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

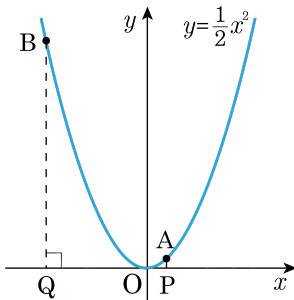
▷ 정답 : 8

▷ 정답 : 18

해설

$y = \frac{1}{2}x^2 - q$ 와 x 축과의 교점을 A, B라 하고, x 좌표를 구하면 $\frac{1}{2}x^2 - q = 0$ 에서
 $x = \pm\sqrt{2q}$
 따라서 x 축과의 교점은 $A(-\sqrt{2q}, 0)$, $B(\sqrt{2q}, 0)$
 즉, $\overline{AB} = 2\sqrt{2q}$ 이고 q 는 자연수이므로 $\sqrt{2q}$ 가 정수가 되면 된다.
 $\therefore q = 2, 8, 18$

20. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프 위의 두 점 A, B에 대하여 A의 좌표는 (4, 8)이고, B의 x 좌표는 음수이다. 점 A, B에서 각각 x 축에 수선 $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ 를 그으면 $\overline{AP} : \overline{BQ} = 4 : 25$ 가 된다. 이 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$\overline{AP} : \overline{BQ} = 4 : 25$ 에서 점 A의 y 좌표는
 $4 : 25 = 8 : y$
 $\therefore y = 50$ 따라서, 점 B의 y 좌표는 50이다.
 $y = \frac{1}{2}x^2$ 에 $y = 50$ 을 대입하면 $50 = \frac{1}{2}x^2$, $x^2 = 100$
 $x < 0$ 이므로 $x = -10$ 이 되고 점 B의 x 좌표는 -10이다.
 따라서, $\overline{QO} = 10$, $\overline{PO} = 4$ 이므로 $\overline{PQ} = 14$ 이다.

21. 이차함수 $f(x) = x^2 - 1$ 에 대하여 $f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1} = f(f^n(x))$ 라 할 때, $f^{2009}(-1)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f^1(-1) = 0$
 $f^2(-1) = f(f^1(-1)) = f(0) = -1$
 $f^3(-1) = f(f^2(-1)) = f(-1) = 0$
 $f^4(-1) = f(f^3(-1)) = f(0) = -1$
 $\vdots$
 $\therefore f^{2009}(-1) = 0$

22. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$ 을 지나고 최솟값이 -3일 때, 상수 a, b, c 의 값을 각각 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = \frac{1}{3}$

▷ 정답 : $b = \frac{2}{3}$

▷ 정답 : $c = -\frac{8}{3}$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$ 을 각각 지나므로

$$16a - 4b + c = 0$$

$$4a + 2b + c = 0$$

$$\therefore b = 2a, c = -8a$$

또 주어진 함수의 최솟값이 -3 이므로

$$y = ax^2 + bx + c$$

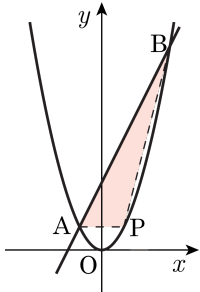
$$= ax^2 + 2ax - 8a$$

$$= a(x+1)^2 - 9a$$

$$\therefore -9a = -3$$

따라서 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}, c = -\frac{8}{3}$ 이다.

23. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = 2x + 3$ 의 교점을 A, B라고 하고, 원점을 O라 한다. 점 P가 원점을 출발하여 포물선을 따라 B까지 움직일 때, $\triangle APB$ 의 넓이와 $\triangle OAB$ 의 넓이가 같게 되는 점 P의 좌표를 구하여라.



[배점 6, 상중]

- ① (1, 1) ② (1, 2) ③ (2, 1)
 ④ (2, 4) ⑤ (3, 2)

해설

$\triangle APB$ 와 $\triangle AOB$ 의 넓이가 같으면 직선 AB와 직선 OP는 평행하므로

직선 OP의 기울기는 2이고 직선 OP는 $y = 2x$ 이다. 점 P는 $y = x^2$ 과 $y = 2x$ 의 교점이므로

$$x^2 = 2x, x^2 - 2x = 0, x(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 2, y = 4 \text{ 또는 } x = 0, y = 0 \text{ (원점)}$$

그런데 P는 원점이 아니므로 $P(2, 4)$

24. 세 이차함수 $y = x^2 - 1$, $y = (x + 1)^2$, $y = (x - 1)^2$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

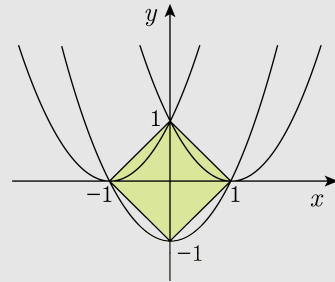
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 2

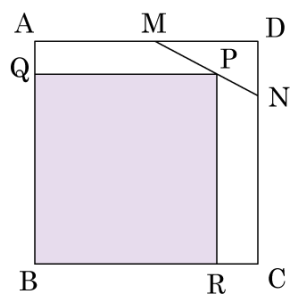
해설

세 이차함수의 그래프는 모양과 폭이 같으므로 세 이차함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ 이다.

25. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 변 AD의 중점을 M, 변 CD의 사등분점 중 D에 가장 가까운 점을 N이라 하고, 선분 MN 위의 한 점 P에서 변 AB, BC에 내린 수선을 받을 각각 Q, R라 하자. 직사각형 BRPQ의 넓이가 최대가 될 때, $\overline{PR}$ 의 길이를 구하여라.



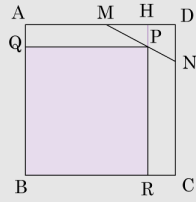
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

해설

$\overline{PR} = x$ 라 하고, 점 P 에서 변 AD 에 선분 PR 의 연장선을 긋고, 점 H 라 하자.



$$\overline{HP} = 4 - x$$

$$\overline{HP} : \overline{DN} = \overline{MH} : \overline{MD}$$

$$(4 - x) : 1 = \overline{MH} : 2$$

$$\therefore \overline{MH} = 8 - 2x$$

$$\therefore \square BQPM = x(10 - 2x) = -2x^2 + 10x$$

함수 $f(x) = -2x^2 + 10x$ 의 최댓값은 $3 \leq x \leq 4$ 이므로

$\therefore x = 3$ 일 때, 최댓값 12 를 갖는다.

따라서 $\overline{PR} = 3$ 이다.