단원 종합 평가

1. 점$(k,\ 2)$ 가 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프 위에 있을 때, k 의 값은? [배점 3, 중하]

① ±1 ② ±2 ③ ±3 ④ ±4 ⑤ ±5

해설

$(k,\ 2)$를 $y=\frac{1}{2}x^2$ 에 대입하면 $2=\frac{1}{2}k^2$
$k^2=4\quad\therefore k=\pm2$

2. 다음은 이차함수 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$ 의 그래프에 대한 설명이다. 보기에서 옳은 것을 모두 골라라.

보기

㉠ 점 $(-2,\ 0)$ 을 꼭짓점으로 한다.

㉡ 대칭축은 $x=-2$ 이다.

㉢ 치역은 $\{y\mid y\le0\}$ 이다.

㉣ x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가하는 x 의 값의 범위는 $x<2$ 이다.

㉤ 위로 볼록한 포물선이다.

㉥ $y=-\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉤

해설

이차함수 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$ 의 그래프는 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프로 꼭짓점은 $(2,\ 0)$, 축의 방정식은 $x=2$ 이다. 위로 볼록한 그래프이므로 치역은 $\{y\mid y\le0\}$ 이고 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가하는 x 의 값의 범위는 $x<2$ 이다.

3. 다음 중 이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2+2$ 의 치역은? [배점 3, 중하]

① $\{y\mid y\ge2\}$ ② $\{y\mid y\le2\}$

③ $\{y\mid y\ge-8\}$ ④ $\{y\mid y\le-8\}$

⑤ $\{y\mid y\ge0\}$

해설

정의역은 모든 실수이나, 실수의 제곱은 항상 0또는 양수이기 때문에 이 그래프의 치역은 $\{y\mid y\ge2\}$ 이다.

4. 이차함수 $y=-x^2$ 에 대하여 □안에 알맞은 것은?

(1) □을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

(2) □축에 대하여 대칭이다.

(3) y 가 증가하는 x 의 범위 : □

y 가 감소하는 x 의 범위 : □

[배점 3, 중하]

① $(0,\ 0),\ y,\ x<0,\ x>0$

② $(0,\ 0),\ y,\ x>0,\ x<0$

③ $(0,\ 0),\ x,\ x<0,\ x>0$

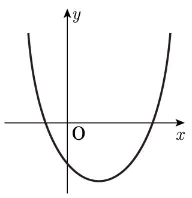
④ $(1,\ -1),\ y,\ x>0,\ x<0$

⑤ $(0,\ 0),\ x,\ x>0,\ x<0$

해설

꼭짓점은 $(0,0)$ 이고 대칭축의 방정식은 $x=0$, 위로 볼록한 포물선이므로 $x<0$ 일 때, y 는 증가하고 $x>0$ 일 때, y 는 감소한다.

5. 다음 그림은 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프이다. $a,\ p,\ q$ 의 부호로 옳은 것은?



[배점 4, 중중]

① $a<0,\ p>0,\ q>0$

② $a>0,\ p<0,\ q<0$

③ $a>0,\ p<0,\ q>0$

④ $a>0,\ p>0,\ q<0$

⑤ $a>0,\ p>0,\ q>0$

해설

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 가 아래로 볼록이므로 $a>0$ 이고, 꼭짓점 (p,q) 는 제4 사분면에 있으므로 $p>0, q<0$ 이다.

6. 이차함수 $y=-3x^2+18x$ 을 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 나타낼 때, 상수 a,p,q 의 합 $a+p+q$ 의 값은?

[배점 4, 중중]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

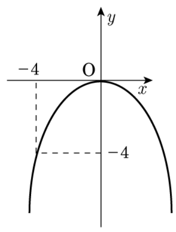
해설

$y=-3(x^2-6x+9-9)=-3(x+3)^2+27$

$a=-3, p=-3, q=27$

$a+p+q=21$ 이다.

7. 다음 그림의 이차함수의 그래프와 x 축 대칭인 그래프의 이차함수의 식은?



[배점 4, 중중]

① $y=-3x^2$

② $y=\frac{1}{4}x^2$

③ $y=-\frac{1}{3}x^2$

④ $y=-2x^2$

⑤ $y=-\frac{1}{4}x^2$

해설

$y = ax^2$ 에 $(-4, -4)$ 를 대입하면 $a = -\frac{1}{4}$
따라서 $y = -\frac{1}{4}x^2$ 이므로 이 함수와 x 축 대칭인 이차함수는 $y = \frac{1}{4}x^2$ 이다.

8. 함수 $f : R \to R$ 에서 $f(x) = x^2 - x - 2$ 이다. $f(a) = 4$ 일 때, 양수 a 의 값은?(단, R은 실수)

[배점 4, 중중]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(a) = 4$ 이므로
$a^2 - a - 2 = 4,\ \ a^2 - a - 6 = 0,\ \ (a-3)(a+2) = 0$
$\therefore\ a = 3$ 또는 $a = -2$
한편, $a > 0$ 이므로 $a = 3$ 이다.

9. 이차함수 $y = x^2 + 4x + 2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 식의 최솟값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y = x^2 + 4x + 2 = (x+2)^2 - 2$
위의 그래프를 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동시키면
$y = (x+2)^2 - 2 + 3 = (x+2)^2 + 1$
따라서 $x = -2$ 일 때, 최솟값은 1 이다.

10. 다음 중 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? [배점 5, 중상]

① y축에 대하여 대칭이다.

② 아래로 볼록하다.

③ 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 0)$ 이다.

④ $y = 2x^2$ 의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

⑤ $y = -x^2$ 의 그래프보다 폭이 좁다.

해설

$y = ax^2$ 의 그래프는 꼭짓점이 원점, y축이 대칭축이다. $a > 0$이면 아래로 볼록, $a < 0$이면 위로 볼록하다. $|a|$이 작을수록 포물선의 폭이 넓다.
$y = -ax^2$ 와 x축에 대하여 대칭이다.
$\therefore$ ②가 옳지 않다.

11. 이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 0)$ 이 되도록 평행이동하면 점 $(k,\ 6)$ 을 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : -1

해설

이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 0)$ 이 되도록 평행이동하면 $y = \frac{2}{3}(x-2)^2$ 이다. 점 $(k,\ 6)$ 을 지나므로 대입하면 $6 = \frac{2}{3}(k-2)^2$, $9 = (k-2)^2$, $k - 2 = \pm 3$ 따라서 $k = 5,\ -1$ 이다.

12. 포물선 $y=(x+a-1)^2+(a^2-3a-10)$ 의 꼭짓점이 $(2,\ k)$ 일 때, k 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

꼭짓점의 좌표 $(1-a,\ a^2-3a-10)$ 이 $(2,\ k)$ 이므로

$1-a=2$

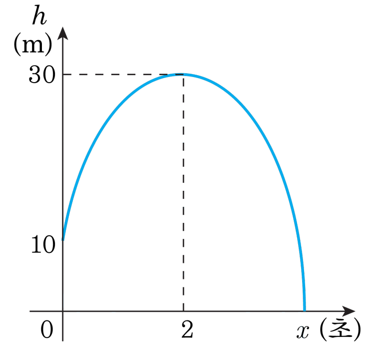
$\therefore a=-1$

$a^2-3a-10$ 에 $a=-1$ 을 대입하면

$1+3-10=k$

$\therefore\ k=-6$

13. 다음 그림은 지면으로부터 10m 높이에서 던져 올린 물체의 운동을 나타내는 그래프이다. 던진 후 몇 초 만에 다시 지면으로 떨어지는가?



[배점 5, 중상]

① 4 초
② $(\sqrt{6}-2)$ 초
③ $(2+\sqrt{6})$ 초
④ 5 초
⑤ 6 초

해설

$y=a(x-2)^2+30$ 이고, $(0,\ 10)$ 을 지난다.

$10=4a+30$

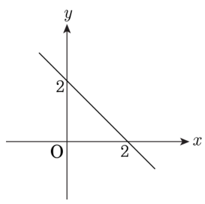
$\therefore a=-5$

$\therefore y=-5(x-2)^2+30=-5x^2+20x+10$

$x^2-4x-2=0$

$\therefore x=2+\sqrt{6}\ \ (\because x>0)$

14. 다음 그림은 일차함수 $y=ax+b$ 의 그래프이다. 이차함수 $y=\frac{1}{2}ax^2+bx+3$ 의 그래프의 최댓값을 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

기울기 $a=-1$, y 절편 $b=2$

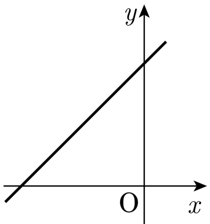
$y=\frac{1}{2}ax^2+bx+3$

$=-\frac{1}{2}x^2+2x+3$

$=-\frac{1}{2}(x-2)^2+5$

$x=2$ 일 때, 최댓값은 5 이다.

15. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $y = ax^2 - bx$ 의 그래프의 꼭짓점은 어느 위치에 있는가?



[배점 5, 중상]

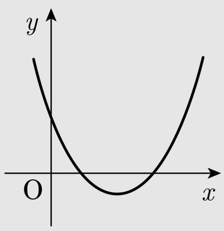
① x 축 위　　② y 축 위

③ 제 1 사분면　　④ 제 2 사분면

⑤ 제 4 사분면

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 $y = ax^2 - bx$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점과 축은 y축의 오른쪽에 있으며 원점을 지난다.



16. 직선 $y = 1 - x$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 A, 포물선 $y = ax^2$, $y = bx^2$ 의 그래프와 1 사분면에서 만나는 점을 각각 B, C, y 축과 만나는 점을 D 라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$ 가 되기 위한 상수 a, b 의 값을 구하여라. (단, $a > b > 0$) [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 12$

▷ 정답 : $b = \frac{4}{9}$

해설

$\mathrm{A}(1.0)$, $\mathrm{D}(0,\ 1)$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$ 이므로

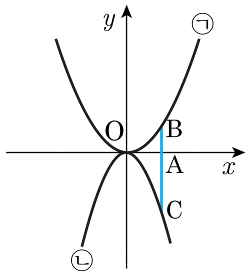
$\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right)$, $\mathrm{C}\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$

$y = bx^2$ 가 $\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ 를 지나므로 $b = \frac{4}{9}$

$y = ax^2$ 가 $\mathrm{C}\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$ 를 지나므로 $a = 12$

$\therefore\ a = 12,\ b = \frac{4}{9}$

17. 그림과 같이 2 개의 포물선 $y = \frac{1}{2}x^2 \cdots$㉠ , $y = -x^2 \cdots$㉡ 이 있다. 점 $A(a,\ 0)$ 을 지나며, x 축에 수직인 직선이 포물선 ㉠ 과 만나는 점을 B , 포물선 ㉡ 과 만나는 점을 C 라 한다. $\overline{\mathrm{BC}} = \frac{4}{3}$ 일 때, a 의 값을 구하면?



[배점 5, 상하]

① $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　③ $\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{2}$　　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

해설

$\mathrm{B}(a,\ \frac{1}{2}a^2)$, $\mathrm{C}(a,\ -a^2)$

$\overline{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2}a^2 - (-a^2) = \frac{3}{2}a^2 = \frac{4}{3}$

$\therefore a = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\because a > 0)$

18. 두 변의 길이가 10 인 직각이등변삼각형에 내접하는 직사각형의 넓이가 최대일 때, 직사각형의 둘레의 길이를 구하여라. [배점 5, 상하]

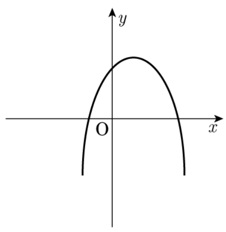
▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 직사각형의 넓이를 y 라고 하자.
직사각형 부분을 제외하고 남은 세 삼각형은 모두 직각이등변삼각형이므로 직사각형의 가로의 길이는 $(10 - x)$ 이다.
$\therefore\ y = x(10-x) = -x^2+10x = -2(x-5)^2+25$
따라서 직사각형의 세로의 길이가 5, 가로의 길이가 5 일 때, 넓이가 최대이므로
둘레의 길이는 $2(5+5) = 20$ 이다.

19. 이차함수 $f(x) = ax^2+bx+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르시오.



[배점 5, 상하]

① $b^2 - 4ac < 0$

② $abc < 0$

③ $-\frac{c}{a} > 0$

④ $x_1 < x_2 < 0$ 일 때, $f(x_1) < f(x_2)$

⑤ $a - b + c > 0$

해설

① x 축과의 교점이 두 개이므로 $\mathrm{D} = b^2 - 4ac > 0$
② $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$ 이므로 $abc < 0$
③ $a < 0,\ c > 0$ 이므로 $-\frac{c}{a} > 0$
④ $x < 0$ 인 구간에서 x 값이 증가하면 y 값도 증가하는 그래프이므로
$x_1 < x_2 < 0$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$
⑤ $f(-1) = a - b + c$ 의 값은 양수도 될 수 있고 음수도 될 수 있다.
따라서 옳지 않은 것은 ①, ⑤이다.

20. 이차함수 $y = (x-1)(x-p^2)\ (p > 0)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점, y 축과 만나는 한 점을 연결한 삼각형의 외심 O 의 x 좌표가 6 일 때, p 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{11}$

해설

x 축과 만나는 두 점은 $(1,\ 0),\ (p^2,\ 0)$ 이고
y 축과 만나는 점은 $(0,\ p^2)$
외심 O 의 x 좌표가 6 이므로 $\frac{p^2+1}{2} = 6$
$\therefore\ p = \pm\sqrt{11}$
따라서 $p > 0$ 이므로 $p = \sqrt{11}$ 이다.

21. 어떤 상품의 개당 가격을 x 원, 하루 판매량을 y 개 라고 할 때, x 에서 y 로의 함수 $f(x)$ 는 기울기가 음인 일차함수의 그래프를 그린다. 이 상품의 가격이 개당 100 원일 때는 하루에 40 개가 팔렸고, 개당 가격을 100 원에서 25% 올렸더니, 하루 판매량은 12.5% 감소하였다고 할 때, 하루 매출액이 최대가 되려면 이 상품의 개당 가격을 얼마로 정해야 하는지 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 150 원

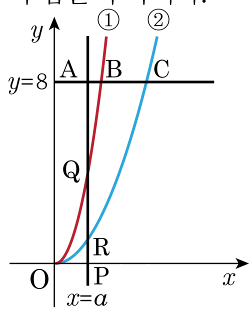
해설

100 원일 때는 하루에 40 개가 팔렸고, 개당 가격을 100 원에서 25% 올렸더니, 하루 판매량은 12.5% 감소하였으므로 125 원일 때, 35 개가 팔렸다.
따라서 $f(x) = ax + b$ 로 놓으면 그래프가 두 점 $(100,\ 40)$, $(125,\ 35)$ 를 지나므로
$40 = 100a + b$
$35 = 125a + b$
$\therefore\ a = -\frac{1}{5},\ b = 60$
$\therefore\ f(x) = -\frac{1}{5}x + 60$
하루 매출액을 S 라 하면

$$S = xy = x\left(-\frac{1}{5}x + 60\right)$$
$$= -\frac{1}{5}x^2 + 60x$$
$$= -\frac{1}{5}(x-150)^2 + 4500$$

따라서 개당 가격이 150 원일 때, 하루 매출액이 최대가 된다.

22. 다음 그림은 이차함수 $y = 2x^2(x \geq 0)\cdots$①, $y = \frac{1}{2}x^2(x \geq 0)\cdots$②의 그래프이다. 직선 $y = 8$ 이 y 축 및 곡선 ①, ②와 점A, B, C에서 만나고 $x = a$ 가 x 축 및 곡선 ②, ①과 점P, R, Q 에서 만날 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ 와 $\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}$ 의 합을 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

(1) $8 = 2x^2, x^2 = 4$ $x > 0$ 이므로 $x = 2$
$8 = \frac{1}{2}x^2, x^2 = 16$에서 $x > 0$ 이므로 $x = 4$
$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$
(2) $\overline{PR} = \frac{1}{2}a^2, \overline{PQ} = 2a^2,$
$\overline{QR} = 2a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2$
$\therefore \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$
$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = 1 + 3 = 4$

23. 두 이차함수 $y = 3x^2$, $y = 2x^2 + 10$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점 중, x, y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 35 개

해설

두 그래프의 교점의 x 좌표를 구하면

$3x^2 = 2x^2 + 10$

$\therefore x = \pm\sqrt{10}$

이때, 두 그래프로 둘러싸인 영역의 x 좌표의 범위가 $-\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$이고,

y 좌표의 범위는 $3x^2 < y < 2x^2 + 10$

정수인 x 좌표는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

(1) $x = \pm 3$일 때, $27 < y < 28$ 이므로 정수인 y는 없다.

(2) $x = \pm 2$일 때, $12 < y < 18$ 이므로 $y = 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17$

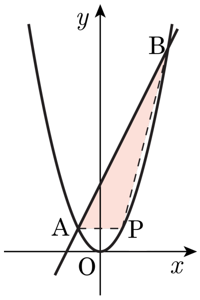
(3) $x = \pm 1$일 때, $3 < y < 12$ 이므로 $y = 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$

(4) $x = 0$ 일 때, $0 < y < 10$ 이므로 $y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$

따라서, x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은

$2 \times (5+8) + 9 = 35$(개)이다.

24. 포물선 $y = x^2$과 직선 $y = 2x + 3$의 교점을 A, B라 하고, 원점을 O라 한다. 점 P가 원점을 출발하여 포물선을 따라 B까지 움직일 때, △APB의 넓이와 △OAB의 넓이가 같게 되는 점 P의 좌표를 구하여라.



[배점 6, 상중]

① $(1, 1)$　② $(1, 2)$　③ $(2, 1)$

④ $(2, 4)$　⑤ $(3, 2)$

해설

△APB와 △AOB의 넓이가 같으면 직선 AB와 직선 OP는 평행하므로

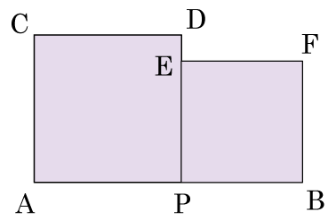
직선 OP의 기울기는 2이고 직선 OP는 $y = 2x$이다. 점 P는 $y = x^2$과 $y = 2x$의 교점이므로

$x^2 = 2x,\ x^2 - 2x = 0,\ x(x-2) = 0$

$\therefore x = 2,\ y = 4$ 또는 $x = 0,\ y = 0$ (원점)

그런데 P는 원점이 아니므로 P$(2,\ 4)$

25. 다음 그림과 같이 길이가 10 인 선분 AB 위의 한 점 P 에서 같은 방향으로 정사각형 APFE, 정사각형 PBGF 를 그릴 때, $\overline{\mathrm{DE}}^2 + \overline{\mathrm{EF}}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

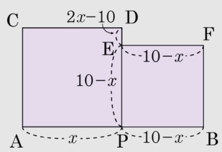


[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설



$\overline{\mathrm{AP}} = x$ 라 하면 위의 그림과 같다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{DE}}^2 + \overline{\mathrm{EF}}^2 &= (10-x)^2 + (2x-10)^2 \\ &= 5x^2 - 60x + 200 \\ &= 5(x-6)^2 + 20\end{aligned}$$

따라서 $x = 6$ 일 때, 최솟값이 20 이다.