

단원 종합 평가

1. 다음 중 이차방정식의 해가 모두 양수인 것은?

[배점 3, 중하]

- ① $(x-2)(x+3)=0$ ② $x^2+2x=0$
 ③ $3x^2+x-1=0$ ④ $x^2-9x+14=0$
 ⑤ $2x^2-8=0$

해설

④ $x=7$ 또는 $x=2$ 일 때 성립하므로 모두 양수이다.

2. 이차방정식 $3x^2+2x-4=0$ 의 해가 $x=\frac{a\pm\sqrt{b}}{3}$ 일 때, a, b 의 값을 각각 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: $a=-1$

해설

$3x^2+2x-4=0$ 에서 양변을 3 으로 나누면
 $x^2+\frac{2}{3}x=\frac{4}{3}$
 $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=\frac{4}{3}+\frac{1}{9}$
 $\therefore \left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{13}{9}, x+\frac{1}{3}=\pm\sqrt{\frac{13}{9}}$
 따라서 $x=-\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{13}{9}}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}$ 이다.
 $\therefore a=-1, b=13$

3. 연속한 두 자연수의 제곱의 합이 41 일 때, 두 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 4

▷ 정답: 5

해설

연속한 두 자연수를 $x, x+1$ 이라 하면

$$x^2+(x+1)^2=41$$

$$2x^2+2x-40=0$$

$$(x-4)(x+5)=0$$

$$x=4 \text{ 또는 } x=-5 \text{ 이다.}$$

$$x>0 \text{ 이므로 } x=4, x+1=5 \text{ 이다.}$$

4. n 각형의 대각선의 개수는 $\frac{n(n-3)}{2}$ 이라 한다. 대각선이 35 개인 다각형은 몇 각형인지 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 10각형

해설

$$\frac{n(n-3)}{2}=35$$

$$n(n-3)=70$$

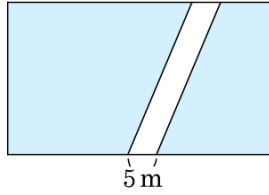
$$n^2-3n-70=0$$

$$(n-10)(n+7)=0$$

$$n=10 \text{ 또는 } n=-7$$

따라서 10 각형이다.

5. 가로 길이가 세로 길이보다 3배 긴 직사각형 모양의 화단에 다음 그림과 같은 길을 내었더니, 화단의 넓이가 250m^2 가 되었다. 처음 화단의 가로 길이를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 30m

해설

화단의 세로의 길이를 $x\text{m}$ 라고 하면, 가로의 길이는 $3x\text{m}$ 이므로

$$x \times 3x - 5 \times x = 250$$

$$(x - 10)(3x + 25) = 0$$

$$x = 10 \left(\text{단, } x > \frac{5}{3} \right)$$

따라서 가로의 길이는 $3x$ 이므로 30m

6. 두 집합 $A = \{x | x^2 + ax + b = 0\}$, $B = \{x | x^2 + cx + d = 0\}$ 에 대하여 $A \cup B = \{-1, 3, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 2

해설

$A \cup B = \{-1, 3, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$ 이므로

$A = \{-1, 3\}$, $B = \{3, 5\}$ 라 하면

$$A : (x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$a = -2, b = -3$$

$$B : (x - 3)(x - 5) = x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$c = -8, d = 15$$

$$a + b + c + d = -2 - 3 - 8 + 15 = 2$$

7. 집합 $A = \{x | x^2 - 9x + k = x - 7\}$ 에서 $n(A) = 1$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 18

해설

$$x^2 - 9x + k - x + 7 = 0$$

$$x^2 - 10x + k + 7 = 0$$

$n(A) = 1$ 이므로 중근을 갖는다.

$$k + 7 = 25$$

$$k = 18$$

8. 이차방정식 $x^2 + ax - 2 = 0$ 의 한 근이 $x = -2$ 이고, $x^2 + 3x + b = 0$ 의 한 근이 $x = -1$ 일 때, ab 의 값을 구하면? [배점 4, 중중]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 + ax - 2 = 0$ 에 $x = -2$ 를 대입하면,

$$4 - 2a - 2 = 0 \quad \therefore a = 1$$

$x^2 + 3x + b = 0$ 에 $x = -1$ 을 대입하면,

$$1 - 3 + b = 0 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore ab = 2$$

9. 이차방정식 $(x+1)(x-2) = -2x+4$ 의 두 근 a, b ($a > b$) 에 대하여 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근은?

[배점 4, 중중]

- ① $x = -3$ 또는 $x = 1$
 ② $x = 3$ 또는 $x = -1$
 ③ $x = 2$ 또는 $x = -3$
 ④ $x = 3$ 또는 $x = -3$
 ⑤ $x = -3$ 또는 $x = -1$

해설

방정식을 정리하면 $x^2 + x - 6 = 0$
 $(x+3)(x-2) = 0, x = 2, -3$
 두 근이 a, b ($a > b$) 이므로 $a = 2, b = -3$
 $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x+3)(x-1) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = 1$

10. 이차방정식 $5x^2 - 2x - a = 0$ 의 두 근의 곱이 -2 이고 해가 $\frac{k \pm \sqrt{m}}{5}$ 일 때, $m - k$ 의 값을 구하여라. (단, a 는 상수, k 와 m 은 유리수) [배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 50

해설

(두 근의 곱) $= -\frac{a}{5} = -2$
 $\therefore a = 10$
 (두 근의 합) $= \frac{2}{5} = \frac{2k}{5}$
 $\therefore k = 1$
 $\left(\frac{k + \sqrt{m}}{5}\right) \times \left(\frac{k - \sqrt{m}}{5}\right) = \frac{k^2 - m}{25} =$
 $\frac{1 - m}{25} = -2, m = 51$
 $\therefore m - k = 51 - 1 = 50$

11. 집합 $A = \{x | x^2 - (a+1)x + a = 0\}$, $B = \{x | x^2 - (b-2)x - 2b = 0\}$, $C = \{x | x^2 - (3a+5b)x + 15ab = 0\}$ 가 있다.

집합 $P = \{x | x \in A, x \in B, x \in C, x < 0\}$, $n(P) = 1$ 일 때, $a - 5b$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 0

해설

$A : (x-1)(x-a) = 0 \Rightarrow x = 1, a$
 $B : (x+2)(x-b) = 0 \Rightarrow x = b, -2$
 $C : (x-3a)(x-5b) = 0 \Rightarrow x = 3a, 5b$
 $P = A \cap B \cap C$ 이고, $n(P) = 1$ 이므로 공통근이 하나이며 음수이다.
 따라서 공통근은 a 또는 -2 이다.
 (1) 공통근이 -2 일 때
 A 에서 $a = -2$, C 는 $x = -6, 5b$ 이므로
 $5b = -2 \Rightarrow b = -\frac{2}{5}$
 (2) 공통근이 a 일 때 ($a \neq -2$)
 B 에서 $a = b$ 가 되고 C 에서 $x = 3a, 5a$ 가
 되어 공통근이 생기지 않는다.
 따라서 $a = -2, -5b = 2$ 이므로 $a - 5b$ 의 값은 0
 이다.

12. 부등식 $2 \leq 2x - 2 < 5$ 를 만족시키는 두 자연수가 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근일 때, $a^2 - b^2$ 의 값을 구하면? [배점 5, 중상]

- ① 61 ② 51 ③ 11

- ④ -11 ⑤ -61

해설

부등식 $2 \leq 2x - 2 < 5$ 를 풀면 다음과 같다.

$$4 \leq 2x < 7$$

$$2 \leq x < \frac{7}{2} \therefore x = 2, 3$$

이 두 자연수를 근으로 가지므로 이를 이차방정식에 대입하여 풀면

$$a = -5, b = 6$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (-5)^2 - 6^2 = 25 - 36 = -11$$

해설

$$\frac{ax^2 + 2x + b}{5x^2 - cx + 3} = 4 \text{ 를 정리하면,}$$

$$(a - 20)x^2 + (2 + 4c)x + b - 12 = 0$$

이 식이 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 성립하므로 x 에 대한 항등식이다.

$$\text{따라서 } a - 20 = 0, 2 + 4c = 0, b - 12 = 0$$

$$\therefore a = 20, b = 12, c = -\frac{1}{2}$$

$$abc = 20 \times 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -120$$

13. 두 집합 $A = \{x \mid (3x - 2)(x - 4) = 0\}$, $B = \{x \mid (3x + 1)(x - 4) = 0\}$ 에 대하여 집합 $B - A$ 를 구하면?
[배점 5, 중상]

- ① $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$ ② $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ ③ $\left\{\frac{1}{4}\right\}$
④ $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ⑤ $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

해설

$$A = \{x \mid (3x - 2)(x - 4) = 0\} \text{이므로 } A = \left\{\frac{2}{3}, 4\right\}$$

$$B = \{x \mid (3x + 1)(x - 4) = 0\} \text{이므로 } B = \left\{-\frac{1}{3}, 4\right\}$$

$$\therefore B - A = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

15. 이차방정식 $x^2 - 2ax + b = 0$ 의 근이 $x = 1 \pm 2\sqrt{5}$ 일 때, 상수 a, b 의 합을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: -18

해설

$$x^2 - 2ax + b = 0 \text{ 에서 } x^2 - 2ax = -b, x^2 - 2ax + a^2 = -b + a^2$$

$$(x - a)^2 = -b + a^2, (x - a) = \pm \sqrt{-b + a^2}$$

$$\therefore x = a \pm \sqrt{-b + a^2} = 1 \pm 2\sqrt{5}$$

따라서 $a = 1$, a 값을 대입하면

$$\sqrt{1 - b} = \sqrt{20}$$

$$\therefore b = -19$$

따라서 $a + b = -18$ 이다.

14. 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 $\frac{ax^2 + 2x + b}{5x^2 - cx + 3} = 4$ 이라 한다. 이 때, abc 의 값을 구하면?
[배점 5, 중상]

- ① 100 ② 120 ③ 240
④ -120 ⑤ -100

16. 전체집합 $U = \{x \mid 7x - 5 \leq 4x + 16 \text{이고 } x \text{는 자연수}\}$ 일 때,
부분집합 $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ 에 대하여 A^C 을
원소나열법으로 나타내면? [배점 5, 중상]

- ① $A^C = \{1, 5, 6, 7\}$
 ② $A^C = \{1, 4, 5, 6, 7\}$
 ③ $A^C = \{1, 4, 5, 7\}$
 ④ $A^C = \{1, 2, 5, 6, 7\}$
 ⑤ $A^C = \{1, 3, 5, 6, 7\}$

해설

$7x - 5 \leq 4x + 16$ 에서 $7x - 4x \leq 16 + 5$, $3x \leq 21$
 $\therefore x \leq 7$
 주어진 전체집합을 원소나열법으로 나타내면 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 이다.
 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 해집합은 $\{2, 3\}$ 이므로 $A^C = \{1, 4, 5, 6, 7\}$ 이 된다.

17. 이차방정식 $2x^2 + (a - 1)x + 24 = 0$ 의 두 근이 모두
양수이고, 한 근이 다른 한 근의 3 배일 때, 상수 a 의
값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: -15

해설

두 근을 $\alpha, 3\alpha$ 로 놓으면
 $\alpha \times 3\alpha = \frac{24}{2} \therefore \alpha = 2 (\because \alpha > 0)$
 $\alpha + 3\alpha = -\frac{a-1}{2} = 8$
 $a = -15$

18. 다음 중 [] 안의 수가 주어진 방정식의 해인 것을
모두 고르면? [배점 5, 상하]

- ① $x^2 - 4x = 3x$ [0]
 ② $x^2 + 2x - 8 = 0$ [-2]
 ③ $(x + 2)^2 = 9x$ [2]
 ④ $2x - 7x + 6 = 0$ [2]
 ⑤ $2x^2 - 15x - 8 = 0$ [8]

해설

[] 안의 수를 식에 대입한다.

19. 다음 중 이차방정식 $(x - a)^2 = b$ 에 대한 설명으로
옳지 않은 것은? [배점 5, 상하]

- ① $b \geq 0$ 이면 근을 갖는다.
 ② $b = 0$ 이면 중근을 갖는다.
 ③ a 의 값에 관계없이 $b > 0$ 이면 서로 다른 두
근을 갖는다.
 ④ $b < 0$ 이면 근을 갖지 않는다.
 ⑤ $b > 0$ 이면 양수와 음수인 두 근을 갖는다.

해설

⑤ 둘 다 양수일 수도, 둘 다 음수일 수도 있다.

20. 다음은 이차방정식에 관한 설명이다. 안에 알맞은 말을 써라.

방정식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이 (이차식) = 0 의 모양으로 되는 식을 이라고 한다.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 이차방정식

해설

(이차식) = 0 의 형태를 이차방정식이라 한다.

21. 이차방정식 $x^2 + 2x + A = 0$ 의 근이 $x = 2$ 또는 $x = -4$ 일 때, A 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

- ① -8 ② -6 ③ -2 ④ 6 ⑤ 8

해설

$$(x - 2)(x + 4) = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0, A = -8$$

22. 두 개의 주사위를 굴려서 나온 눈을 각각 m, n 이라 할 때, 이차방정식 $x^2 + 2mx + n^2 = 0$ 이 실근을 갖지 않을 확률을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{12}$

해설

이차방정식 $x^2 + 2mx + n^2 = 0$ 이 실근을 갖지 않을 조건은

$$D < 0 \text{ 이므로}$$

$$D = (2m)^2 - 4n^2 < 0, m^2 < n^2$$

$$\therefore m < n$$

따라서 $(m, n) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5),$

$(1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5),$

$(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)$

이므로 확률은 $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ 이다.

23. 사과 120 개를 몇 명의 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 한 사람에게 돌아가는 사과의 수는 학생 수보다 2 만큼 작다. 학생 수를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 명

해설

학생 수를 x , 사과 수를 $x - 2$ 라고 하면

$$x(x - 2) = 120$$

$$x^2 - 2x - 120 = 0$$

$$(x - 12)(x + 10) = 0$$

$$x = 12 \text{ 또는 } x = -10$$

$$\therefore x = 12$$

24. 이차방정식 $m^2x^2 - n^2x = 1$ 이 서로 다른 두 정수를 근으로 가질 때, n 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$m^2x^2 - n^2x - 1 = 0$ 에서

서로 다른 두 정수근을 $\alpha, \beta (\alpha \neq \beta)$ 라 하면

$$\alpha + \beta = \frac{n^2}{m^2}, \alpha\beta = -\frac{1}{m^2}$$

이때, α, β 가 정수이므로 $\alpha\beta = -\frac{1}{m^2}$ 도 정수이다.

$$\therefore m = 1 \text{ 또는 } m = -1$$

따라서 $\alpha\beta = -1$ 에서 $\alpha = 1, \beta = -1$ 또는

$$\alpha = -1, \beta = 1$$

$$\alpha + \beta = \frac{n^2}{m^2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{n^2}{m^2} = 0 \quad \therefore n = 0$$

25. 5 보다 큰 실수 a 가 $a(10-a) + \frac{1}{a} + \frac{1}{10-a} = 7$ 을 만족할 때, a 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $5 + \sqrt{23}$

▷ 정답 : $5 + 2\sqrt{5}$

해설

$10 - a = b$ 라 하면 $a + b = 10$ 이므로

$$ab + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 7$$

$$ab + \frac{a+b}{ab} = ab + \frac{10}{ab} = 7$$

양변에 ab 를 곱하면

$$(ab)^2 - 7ab + 10 = 0$$

$$(ab - 2)(ab - 5) = 0$$

$$\therefore ab = 2 \text{ 또는 } ab = 5$$

(1) $ab = 2$ 일 때 $a + b = 10$,

$ab = 2$ 에서 a, b 는 $m^2 - 10m + 2 = 0$ 의 두 근이다.

$$\therefore m = 5 \pm \sqrt{23}$$

그런데 a 가 5 보다 큰 실수이므로 $a = 5 + \sqrt{23}$

(2) $ab = 5$ 일 때 $a + b = 10$,

$ab = 5$ 에서 a, b 는 $n^2 - 10n + 5 = 0$ 의 두 근이다.

$$\therefore n = 5 \pm 2\sqrt{5}$$

그런데 a 가 5 보다 큰 실수이므로 $a = 5 + 2\sqrt{5}$

따라서 (1), (2)에 의하여 $a = 5 + \sqrt{23}$ 또는 $a = 5 + 2\sqrt{5}$ 이다.